

Note sur les polynômes de Kazhdan-Lusztig

Sophie Morel

19 janvier 2009

Dans son article [B], Brenti a prouvé de manière combinatoire une formule non-réursive pour les polynômes de Kazhdan-Lusztig d'un groupe de Coxeter (cf le théorème 4.1 de [B]). Le but de cette note est de donner une interprétation géométrique de cette formule pour les groupes de Coxeter qui sont isomorphes à un groupe de Weyl. Cette interprétation utilise un résultat de [M] (théorème 3.3.5), qui exprime le prolongement intermédiaire d'un faisceau pervers pur comme "tronqué par le poids" de son image.

Donnons rapidement le plan de l'article. La section 1 rappelle la définition, due à Kazhdan et Lusztig, des polynômes de Kazhdan-Lusztig et des polynômes R . La section 2 rappelle le résultat de [M] qui sera utilisé dans l'interprétation géométrique de la formule de Brenti. La section 3 rappelle une décomposition des cellules de Bruhat due à Deodhar, et en donne une nouvelle preuve, qui utilise des calculs de Härterich. Cette décomposition sera utile dans la section 4, pour montrer que la cohomologie des cellules de Bruhat a une forme particulièrement simple. Enfin, la section 4 contient le résultat principal (théorème 4.1), c'est-à-dire la preuve géométrique de la formule de Brenti.

Je remercie Gérard Laumon de m'avoir signalé cette application de [M].

Dans toute la suite, \mathbb{F}_q est un corps fini, $\mathbb{F}_q \subset \overline{\mathbb{F}}_q$ est une clôture algébrique de \mathbb{F}_q et ℓ est un nombre premier inversible dans \mathbb{F}_q .

1 Polynômes de Kazhdan-Lusztig et polynômes R

Dans cette section, nous rappelons quelques résultats de Kazhdan et Lusztig (cf [KL1] et [KL2]).

Soit G un groupe algébrique réductif connexe déployé sur \mathbb{F}_q . Soient B un sous-groupe de Borel de G (défini sur \mathbb{F}_q), $T \subset B$ un tore maximal déployé sur \mathbb{F}_q , B^* le sous-groupe de Borel de G opposé à B (ie tel que $B \cap B^* = T$), N le normalisateur de T dans G et $W = N/T$ le groupe de Weyl. On note Φ l'ensemble des racines de T dans $Lie(G)$, Φ^+ le sous-ensemble de racines positives associé à B (c'est-à-dire l'ensemble des racines de T dans $Lie(B)$), et $\Delta \subset \Phi^+$ l'ensemble des racines simples. Enfin, on note ℓ la fonction longueur sur W associée à Δ et \leq l'ordre de Bruhat sur W .

Rappelons que l'algèbre de Hecke \mathcal{H} de W est l'algèbre sur l'anneau $\mathbb{Z}[t^{1/2}, t^{-1/2}]$ engendrée par des éléments T_w , $w \in W$, soumis aux relations :

$$\begin{aligned} T_w T_{w'} &= T_{ww'} && \text{si } \ell(ww') = \ell(w) + \ell(w') \\ (T_s + 1)(T_s - t) &= 0 && \text{si } s \text{ est la réflexion associée à une racine simple.} \end{aligned}$$

On définit des polynômes $R_{v,w} \in \mathbb{Z}[t]$, $v, w \in W$, $v \leq w$, par les formules (cf [KL1] § 2) :

$$T_w^{-1} = \sum_{v \leq w} (-1)^{\ell(w) - \ell(v)} R_{v,w}(t) t^{-\ell(w)} T_v.$$

$R_{v,w}$ est de degré $\ell(w) - \ell(v)$.

D'après le théorème 1.1 de [KL1] (cf aussi [KL2] § 2), il existe une unique famille de polynômes $P_{v,w} \in \mathbb{Z}[t]$, $v, w \in W$, $v \leq w$, avec $P_{w,w} = 1$ et $P_{v,w}$ de degré $\leq \frac{1}{2}(\ell(w) - \ell(v) - 1)$ si $v < w$, telle que : pour tous $v, w \in W$ tels que $v \leq w$,

$$t^{\ell(w) - \ell(v)} P_{v,w}(t^{-1}) = \sum_{v \leq y \leq w} R_{v,y}(t) P_{y,w}(t).$$

Rappelons l'interprétation géométrique des polynômes $P_{v,w}$ donnée par Kazhdan et Lusztig dans [KL2].

Le choix de B détermine un isomorphisme entre la variété \mathcal{B} des sous-groupes de Borel de G et le quotient G/B . On a deux stratifications de \mathcal{B} par des sous-variétés localement fermées, $\mathcal{B} = \bigcup_{w \in W} X_w = \bigcup_{w \in W} X^w$, avec, pour tout $w \in W$,

$$X_w = \{B' \in \mathcal{B} \mid \exists g \in BwB, B' = gBg^{-1}\}$$

$$X^w = \{B' \in \mathcal{B} \mid \exists g \in B^*wB, B' = gBg^{-1}\}.$$

La variété X_w est isomorphe à l'espace affine $\mathbb{A}^{\ell(w)}$, et X^w est isomorphe à $\mathbb{A}^{\dim(\mathcal{B}) - \ell(w)}$. Pour tout $w \in W$, on note $x_w = wBw^{-1} \in X_w \cap X^w$.

L'adhérence \overline{X}_w de X_w dans \mathcal{B} est la variété de Schubert associée à w . C'est une variété projective irréductible de dimension $\ell(w)$, et on a

$$\overline{X}_w = \bigcup_{v \leq w} X_v.$$

De même, on a

$$\overline{X}^w = \bigcup_{v \geq w} X^v.$$

On note $F : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ le Frobenius. Pour tout $w \in W$, on a $F(X_w) \subset F(X_w)$, $F(X^w) \subset F(X^w)$ et $F(x_w) = x_w$. Pour tous $v, w \in W$ tels que $v \leq w$, on note j_w et $i_{v,w}$ les inclusions de X_w et X_v dans \overline{X}_w , et

$$IC_{\overline{X}_w} = (j_{w!}(\mathbb{Q}[\ell(w)]))[-\ell(w)]$$

le complexe d'intersection à coefficients constants de \overline{X}_w .

Kazhdan et Lusztig ont démontré le théorème suivant ([KL2], théorèmes 4.2 et 4.3) :

Théorème 1.1 (Kazhdan-Lusztig) Soit $w \in W$. Alors le faisceau de cohomologie (ordinaire) $\mathcal{H}^i(IC_{\overline{X}_w})$ est nul si i est impair. Si i est pair et $B' \in \overline{X}_w$ est stable par une puissance F^r de F , alors les valeurs propres de $(F^r)^*$ sur la fibre $\mathcal{H}^i(IC_{\overline{X}_w})_{B'}$ sont toutes égales à $q^{ir/2}$.

De plus, pour tout $v \leq w$, on a

$$P_{v,w}(t) = \sum_{i \geq 0} \dim(\mathcal{H}^{2i}(IC_{\overline{X}_w})_{x_v}) t^i.$$

2 Rappel d'un résultat de [M]

Soit X un schéma séparé de type fini sur \mathbb{F}_q . On note $D_m^b(X, \mathbb{Q}_\ell)$ la catégorie des complexes ℓ -adiques mixtes sur \mathbb{F}_q . Cette catégorie est munie de la t-structure donnée par la perversité autoduale, et on note ${}^p\mathcal{H}^i$ les foncteurs de cohomologie pour cette t-structure. (Les notions de ce paragraphe sont définies dans le chapitre 5 du livre [BBD] de Beilinson, Bernstein et Deligne.)

Pour tout $a \in \mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}$, on note ${}^w D^{\leq a}(X)$ (resp. ${}^w D^{\geq a}(X)$) la sous-catégorie pleine de $D_m^b(X, \mathbb{Q}_\ell)$ dont les objets sont les complexes mixtes K tels que pour tout $i \in \mathbb{Z}$, le faisceau pervers ${}^p\mathcal{H}^i K$ soit de poids $\leq a$ (resp. $\geq a$). Alors ([M], proposition 3.1.1 (iv)) :

Proposition 2.1 Pour tout $a \in \mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}$, $({}^w D^{\leq a}(X), {}^w D^{\geq a+1}(X))$ est une t-structure sur $D_m^b(X, \mathbb{Q}_\ell)$.

On note $w_{\leq a}$ et $w_{\geq a+1} = w_{>a}$ les foncteurs de troncature pour cette t-structure. Ce sont des foncteurs triangulés (car ${}^w D^{\leq a}(X)$ et ${}^w D^{\geq a+1}(X)$ sont des sous-catégories triangulées de $D_m^b(X, \mathbb{Q}_\ell)$), et la dualité de Poincaré échange $w_{\leq a}$ et $w_{\geq -a}$.

Soit (S_0, \dots, S_n) une partition de X par des sous-schémas (localement fermés non vides) telle que, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, S_k soit ouvert dans $X - \bigcup_{l < k} S_l$. En particulier, S_0 est ouvert dans X . Pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, on note i_k l'inclusion de S_k dans X .

Le théorème suivant découle des résultats de la section 3 de [M] :

Théorème 2.2 Soient $a \in \mathbb{Z}$ et K un faisceau pervers pur de poids a sur S_0 . Alors on a une égalité de classes dans le groupe de Grothendieck de $D_m^b(X, \mathbb{Q}_\ell)$:

$$\begin{aligned} [i_{0!*} K] &= \sum_{1 \leq n_1 < \dots < n_r < n} (-1)^r [i_{n_r!} w_{\leq a} i_{n_r}^! \dots i_{n_1!} w_{\leq a} i_{n_1}^! i_{0!} K] \\ &+ \sum_{1 \leq n_1 < \dots < n_r = n} (-1)^r [i_{n_r!} w_{<a} i_{n_r}^! i_{n_{r-1}!} w_{\leq a} i_{n_{r-1}}^! \dots i_{n_1!} w_{\leq a} i_{n_1}^! i_{0!} K]. \end{aligned}$$

Démonstration. On utilise les notations de la section 3 de [M]. D'après la proposition [M] 3.4.2, on a des isomorphismes canoniques

$$w_{\geq (a, a+1, \dots, a+1)} i_{0!} K = w_{\geq (a, a, \dots, a)} i_{0!} K = i_{0!*} K,$$

d'où un isomorphisme canonique

$$w_{\geq(a,a+1,\dots,a+1,a)}i_0!K = i_0!K.$$

De plus, le théorème [M] 3.3.5 donne pour tout $\underline{a} = (a_0, \dots, a_n) \in (\mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\})^{n+1}$ tel que $a = a_0$ une égalité dans le groupe de Grothendieck de $D_m^b(X, \mathbb{Q}_\ell)$:

$$[w_{\leq \underline{a}} Ri_0!K] = \sum_{1 \leq n_1 < \dots < n_r \leq n} (-1)^r [Ri_{n_r}!w_{>a_{n_r}}i_{n_r}^* \dots Ri_{n_1}!w_{>a_{n_1}}i_{n_1}^* Ri_0!K],$$

d'où par dualité :

$$[w_{\geq \underline{a}}i_0!K] = \sum_{1 \leq n_1 < \dots < n_r \leq n} (-1)^r [i_{n_r}!w_{<a_{n_r}}i_{n_r}^! \dots i_{n_1}!w_{<a_{n_1}}i_{n_1}^!i_0!K].$$

Cette égalité, combinée avec l'isomorphisme ci-dessus, donne le résultat cherché. \square

3 Décomposition des X_w

Dans [D2], Deodhar a construit une décomposition des cellules de Bruhat X_w qui induit une décomposition agréable des $X_w \cap X^v$, pour $v \leq w$. Nous allons donner ici une autre interprétation de cette décomposition.

Soit $w \in W$. On fixe une décomposition $w = s_1 \dots s_r$ de w en réflexions simples, avec $r = \ell(w)$. Pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, on note α_i la racine simple correspondant à s_i . Soit $\Gamma = \{1, s_1\} \times \dots \times \{1, s_r\}$. Pour tout $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_r) \in \Gamma$, on note

$$I(\gamma) = \{i \in \{1, \dots, r\} \mid \gamma_i = s_i\}$$

$$J(\gamma) = \{i \in \{1, \dots, r\} \mid \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_i (-\alpha_i) \in \Phi^+\}.$$

Pour tout $v \leq w$, on note

$$\Gamma_v = \{(\gamma_1, \dots, \gamma_r) \in \Gamma \mid \gamma_1 \dots \gamma_r = v\}.$$

Deodhar a montré le résultat suivant ([D2], théorème 1.1 et corollaire 1.2) :

Proposition 3.1 (Deodhar) *La cellule de Bruhat X_w s'écrit de manière canonique comme une union disjointe de sous-variétés localement fermées*

$$X_w = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} Y_\gamma,$$

avec $Y_\gamma = \emptyset$ si $J(\gamma) \not\subset I(\gamma)$, et, pour tout $\gamma \in \Gamma$ tel que $J(\gamma) \subset I(\gamma)$,

$$Y_\gamma \simeq \mathbb{A}^{\text{card}(I(\gamma)-J(\gamma))} \times \mathbb{G}_m^{r-\text{card}(I(\gamma))}.$$

De plus, pour tout $v \in W$ tel que $v \leq w$, on a

$$X_w \cap X^v = \bigcup_{\gamma \in \Gamma_v} Y_\gamma.$$

En utilisant des calculs de Härterich ([H], § 1), on peut donner une autre preuve de ce résultat :

Soit $\lambda : \mathbb{G}_m \rightarrow T$ un cocaractère tel que $\langle \alpha, \lambda \rangle > 0$ pour tout $\alpha \in \Phi^+$. On fait agir \mathbb{G}_m sur \mathcal{B} via λ . Les points fixes de cette action sont les x_z , $z \in W$, et les deux décompositions de Bialynicki-Birula (cf [BB]) de \mathcal{B} sont :

- la décomposition en cellules contractantes, $\mathcal{B} = \bigcup_{z \in W} X_z$;
- la décomposition en cellules dilatantes, $\mathcal{B} = \bigcup_{z \in W} X^z$.

On va décomposer X_w en utilisant la décomposition de Bialynicki-Birula de la résolution de Bott-Samelson de \overline{X}_w associée à la décomposition $w = s_1 \dots s_r$.

Pour toute racine α , on note $p_\alpha : \mathbb{A}^1 \rightarrow U_\alpha$ le sous-groupe à un paramètre associé à α . Si α est une racine simple, on note P_α le sous-groupe parabolique (minimal) de G engendré par B et par $U_{-\alpha}$.

Dans [D1], Demazure a associé à la décomposition $w = s_1 \dots s_r$ de w une résolution des singularités $\pi : BS \rightarrow \overline{X}_w$ (appelée résolution de Bott-Samelson), où $BS = P_{\alpha_1} \times_B \dots \times_B P_{\alpha_r}/B$ et π envoie la classe $[p_1, \dots, p_r]$ de $(p_1, \dots, p_r) \in P_{\alpha_1} \times \dots \times P_{\alpha_r}$ dans BS sur la classe de $p_1 \dots p_r$ dans $\overline{X}_w \simeq \overline{BwB}/B$. La restriction de π à $\pi^{-1}(X_w)$ induit un isomorphisme $\pi^{-1}(X_w) \rightarrow X_w$.

On fait agir B sur BS par multiplication à gauche sur le premier facteur. (Le morphisme π est alors B -équivariant.) En particulier, on a une action de \mathbb{G}_m sur BS (via le cocaractère $\lambda : \mathbb{G}_m \rightarrow T$), dont les points fixes sont les $[\gamma_1, \dots, \gamma_r]$, $(\gamma_1, \dots, \gamma_r) \in \Gamma$. Dans [H], Härterich a décrit la décomposition en cellules contractantes de BS . Nous allons rappeler ses résultats.

Pour tout $(\gamma_1, \dots, \gamma_r) \in \Gamma$, le morphisme $u_\gamma = (p_{\gamma_1(-\alpha_1)}, \dots, p_{\gamma_r(-\alpha_r)}) : \mathbb{A}^r \rightarrow BS$ est une immersion ouverte (cf [H], § 1). On note U_γ son image. On a $U_{(s_1, \dots, s_r)} = \pi^{-1}(X_w)$ et, pour tout $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_r) \in \Gamma$, $U_\gamma \cap U_{(s_1, \dots, s_r)} = u_\gamma(\{(x_1, \dots, x_r) \in \mathbb{A}^r, x_i \neq 0 \text{ si } \gamma_i = 1\})$.

Soit $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_r) \in \Gamma$. Härterich ([H], formule 1.3) montre que la cellule contractante associée à $[\gamma_1, \dots, \gamma_r]$ est

$$C_\gamma = u_\gamma(\{(x_1, \dots, x_r) \in \mathbb{A}^r, x_i = 0 \text{ si } i \notin J(\gamma)\}).$$

La même méthode permet de montrer que la cellule dilatante associée à γ est

$$C^\gamma = u_\gamma(\{(x_1, \dots, x_r) \in \mathbb{A}^r, x_i = 0 \text{ si } i \in J(\gamma)\}).$$

La variété BS est union disjointe des sous-variétés localement fermées C^γ , $\gamma \in \Gamma$, et le morphisme $\pi : BS \rightarrow \overline{X}_w$ est un isomorphisme au-dessus de X_w , donc on a

$$X_w \simeq \dot{\bigcup}_{\gamma \in \Gamma} U_{(s_1, \dots, s_r)} \cap C^\gamma.$$

Pour tout $\gamma \in \Gamma$, on pose

$$Y_\gamma = U_{(s_1, \dots, s_r)} \cap C^\gamma.$$

Soit $\gamma \in \Gamma$. D'après les formules ci-dessus pour C^γ et $U_{(s_1, \dots, s_r)} \cap U_\gamma$, on a

$$Y_\gamma = u_\gamma(\{(x_1, \dots, x_r) \in \mathbb{A}^r, x_i \neq 0 \text{ si } i \notin I(\gamma) \text{ et } x_i = 0 \text{ si } i \in J(\gamma)\}).$$

Donc $Y_\gamma = \emptyset$ si $J(\gamma) \not\subset I(\gamma)$ et, si $J(\gamma) \subset I(\gamma)$,

$$Y_\gamma \simeq \mathbb{A}^{\text{card}(I(\gamma)-J(\gamma))} \times \mathbb{G}_m^{r-\text{card}(I(\gamma))}.$$

Enfin, comme le morphisme π est T -équivariant, on a

$$\pi^{-1}(\overline{X}_w \cap X^v) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma_v} C^\gamma,$$

d'où la deuxième formule de la proposition.

4 Calcul des polynômes de Kazhdan-Lusztig en fonction des polynômes R

Pour tout $d \in \mathbb{Q}$, on définit un endomorphisme \mathbb{Q} -linéaire $\tau_{\leq d}$ de l'anneau des polynômes de Laurent $\mathbb{Q}[t^{1/2}, t^{-1/2}]$ par :

$$\tau_{\leq d} \left(\sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i t^{i/2} \right) = \sum_{i \leq d} a_i t^{i/2}.$$

Le but de cette section est de donner une preuve géométrique du résultat suivant, qui a été prouvé de manière combinatoire par Brenti (cf [B], théorème 4.1) :

Théorème 4.1 *Avec les notations de la section 1, pour tous $v, w \in W$ tels que $v \leq w$, le polynôme $P_{v,w}$ est égal à :*

$$\tau_{\leq \ell(w) - \ell(v) - 1} \left(\sum_{v=v_1 < \dots < v_r < w} (-1)^r R_{v_1, v_2} \tau_{\leq \ell(w) - \ell(v_2)} (R_{v_2, v_3} \dots \dots \tau_{\leq \ell(w) - \ell(v_{r-1})} (R_{v_{r-1}, v_r} \tau_{\leq \ell(w) - \ell(v_r)} (R_{v_r, w}) \dots) \right).$$

Pour tout schéma lisse X sur \mathbb{F}_q , notons $\mathcal{T}(X)$ la sous-catégorie triangulée de $D_m^b(X, \mathbb{Q}_\ell)$ engendrée par les objets isomorphes aux faisceaux $\mathbb{Q}_\ell(m)$, $m \in \mathbb{Z}$. Le groupe de Grothendieck $K(\mathcal{T}(X))$ de $\mathcal{T}(X)$ est le groupe abélien libre engendré par les $[\mathbb{Q}_\ell(m)]$, $m \in \mathbb{Z}$. On définit un isomorphisme de groupes $\varphi : \mathcal{T}(X) \rightarrow \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ par $\varphi([\mathbb{Q}_\ell(m)]) = t^{-m}$, pour tout $m \in \mathbb{Z}$. Si K est un objet de $\mathcal{T}(X)$ et $j \in \mathbb{N}^*$, on a, pour tout $x \in X(\mathbb{F}_{q^j})$,

$$\varphi([K])(q^j) = \text{Tr}(F^{j*}, K_x).$$

Lemme 4.2 (i) *Soit X lisse connexe sur \mathbb{F}_q . Pour tout objet K de $\mathcal{T}(X)$ et tout $a \in \mathbb{Z}$, on a :*

$$\varphi([w_{\leq a} K]) = \tau_{\leq a - \dim(X)}(\varphi([K])).$$

(ii) Pour tous $v, w \in W$ tels que $v \leq w$ et tout $K \in \mathcal{T}(X_w)$, le complexe $i_{v,w}^! j_{w!} K$ est dans $\mathcal{T}(X_v)$, on a un isomorphisme $\text{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)$ -équivariant

$$(i_{v,w}^! j_{w!} K)_{x_v} \simeq R\Gamma_c((X_w \cap X^v)_{\overline{\mathbb{F}}_q}, K|_{X_w \cap X^v})$$

et $\varphi([i_{v,w}^! j_{w!} K]) = \varphi([K])R_{v,w}(t)$.

(iii) Pour tous $v, w \in W$ tels que $v \leq w$, le complexe $i_{v,w}^* IC(\overline{X}_w)$ est dans $\mathcal{T}(X_v)$.

Démonstration.

(i) On peut supposer que $K = \mathbb{Q}_\ell(m)$. L'égalité est alors évidente.

(ii) On peut supposer que $K = \mathbb{Q}_\ell(m)$. Le complexe $i_{v,w}^! j_{w!} K$ est un complexe B -équivariant sur X_v . Comme B agit transitivement sur X_v et que les stabilisateurs des points de X_v sont connexes, les faisceaux de cohomologie de $i_{v,w}^! j_{w!} K$ sont constants. Il suffit donc de montrer que $(i_{v,w}^! j_{w!} K)_{x_v} \in \mathcal{T}(x_v)$.

D'après [KL2] 1.4, on a un diagramme commutatif T -équivariant

$$\begin{array}{ccccc} & & \overline{X}_w & \xleftarrow{j^w} & X_w \\ & \nearrow^{i_{v,w}} & \uparrow & & \uparrow \\ X_v & \xrightarrow{(id, x_v)} & X_v \times (\overline{X}_w \cap X^v) & \xleftarrow{(id, j)} & X_v \times (X_w \cap X^v) \end{array}$$

où les flèches verticales sont des immersions ouvertes et j est l'inclusion $X_w \cap X^v \rightarrow \overline{X}_w \cap X^v$. D'après la formule de Künneth (cf SGA 5 III 1.7), on a

$$i_{v,w}^! j_{w!} K = (id, x_v)^! (id, j)^! (\mathbb{Q}_{\ell, X_v} \boxtimes \mathbb{Q}_{\ell, X_w \cap X^v}(m)) = \mathbb{Q}_{\ell, X_v} \boxtimes (x_v^! j^! \mathbb{Q}_\ell(m)),$$

donc

$$(i_{v,w}^! j_{w!} K)_{x_v} = x_v^! j^! \mathbb{Q}_\ell(m) = x_v^! j_{w!} (K|_{X_w \cap X^v}).$$

D'après le sous-lemme 1 (qu'on peut appliquer par [KL2] 1.5), on a un isomorphisme $\text{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)$ -équivariant

$$(i_{v,w}^! j_{w!} K)_{x_v} = x_v^! j^! (K|_{X_w \cap X^v}) \simeq R\Gamma_c((X_w \cap X^v)_{\overline{\mathbb{F}}_q}, K|_{X_w \cap X^v}).$$

De plus, $X_w \cap X^v$ est union disjointe de schémas de la forme $\mathbb{A}^r \times \mathbb{G}_m^s$ d'après la proposition 3.1, donc on a bien $(i_{v,w}^! j_{w!} K)_{x_v} \in \mathcal{T}(x_v)$.

Enfin, l'isomorphisme ci-dessus donne, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$,

$$\varphi([i_{v,w}^! j_{w!} K])(q^j) = \text{Tr}(F^{j*}, (i_{v,w}^! j_{w!} K)_{x_v}) = \text{Tr}(F^{j*}, R\Gamma_c((X_w \cap X^v)_{\overline{\mathbb{F}}_q}, \mathbb{Q}_\ell(m))).$$

D'après la formule des points fixes de Grothendieck-Lefschetz (SGA 4 1/2 Rapport 1.3.2) et le sous-lemme 2,

$$\begin{aligned} \text{Tr}(F^{j*}, R\Gamma_c((X_w \cap X^v)_{\overline{\mathbb{F}}_q}, \mathbb{Q}_\ell(m))) &= \sum_{x \in (X_w \cap X^v)(\overline{\mathbb{F}}_{q^j})} \text{Tr}(F_x^*, \mathbb{Q}_\ell(m)) \\ &= q^{-jm} \text{card}((X_w \cap X^v)(\overline{\mathbb{F}}_{q^j})) = q^{-jm} R_{v,w}(q^j). \end{aligned}$$

Donc, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$,

$$\varphi([i_{v,w}^! j_w! K])(q^j) = q^{-jm} R_{v,w}(q^j) = \varphi([K])(q^j) R_{v,w}(q^j),$$

ce qui implique la dernière égalité de (ii).

(iii) Le complexe $i_{v,w}^* IC(\overline{X}_w)$ est un complexe B -équivariant sur X_v , donc ses faisceaux de cohomologie sont constants, et il suffit comme dans (ii) de montrer que $IC(\overline{X}_w)_{x_v} \in \mathcal{T}(x_v)$. Ceci résulte du théorème 1.1. □

Le premier sous-lemme est prouvé par Springer dans [S], § 3, proposition 1.

Sous-lemme 1 *Soit X une variété sur \mathbb{F}_q munie d'une action de \mathbb{G}_m qui contracte X sur un point $a \in X$ (c'est-à-dire que, pour tout $x \in X$, $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda.x = a$). Soit K un complexe ℓ -adique \mathbb{G}_m -équivariant sur X . Alors le morphisme d'adjonction $a_! a^! K \rightarrow K$ induit un isomorphisme*

$$a^! K \xrightarrow{\sim} R\Gamma_c(X, K).$$

Le deuxième sous-lemme est une observation de Kazhdan et Lusztig ([KL1] lemmes A3 et A4, voir aussi [KL2] 4.6).

Sous-lemme 2 *Pour tout $v \leq w$, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, on a*

$$R_{v,w}(q^j) = \text{card}((X_w \cap X^v)(\mathbb{F}_{q^j})).$$

Démonstration du théorème 4.1. Avec les notations ci-dessus, le théorème 1.1 implique : pour tous $v, w \in W$ tels que $v \leq w$, on a

$$P_{v,w}(t) = \varphi([i_{v,w}^* IC(\overline{X}_w)]).$$

Le résultat cherché résulte alors directement du théorème 2.2 et du lemme 4.2. □

Références

- [BBD] A. Beilinson, J. Bernstein et P. Deligne, *Analyse et topologie sur les espaces singuliers (I)*, Astérisque 100 (1982)
- [BB] A. Bialynicki-Birula, *Some theorems on actions of algebraic groups*, Annals of Math. 98, n°3 (1973), p 480-493.
- [B] F. Brenti, *Lattice Paths and Kazhdan-Lusztig polynomials*, Journal of the AMS, Vol. 11, n°2 (avril 1998), p. 229-259.
- [D1] M. Demazure, *Désingularisation des variétés de Schubert généralisées*, Annales scientifiques de l'É.N.S 4^e série, tome 7, n°1 (1974), p 53-88.

- [D2] V. Deodhar, *On some geometric aspects of Bruhat orderings. I. A finer decomposition of Bruhat cells*, Invent. Math. 79 (1985), p. 499-511.
- [H] M. Härterich, *The T -equivariant cohomology of Bott-Samelson varieties*, arXiv :math.AG/0412337 (2004).
- [KL1] D. Kazhdan et G. Lusztig, *Representations of Coxeter groups and Hecke algebras*, Inventiones math. 53 (1979), p 165-184.
- [KL2] D. Kazhdan et G. Lusztig, *Schubert varieties and Poincaré duality*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics 36 (1980), p 185-203.
- [M] S. Morel, *Complexes pondérés sur les compactifications de Baily-Borel. Le cas des variétés de Siegel*, Journal of the AMS 21 (2008), no. 1, p 23-61.
- [S] T.A. Springer, *A purity result for fixed point varieties in flag manifolds*, Journal Fac. Sci. Univ. Tokyo 31 (1984), p 271-282.