中国科学: 数学　2024 年　第 54 卷　第 12 期: 2059～2068
SCIENTIA SINICA Mathematica
《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS

论 文

曲线算术模空间上的微积分

献给中山大学建校百年暨中山大学数学学科建设 100 周年

张寿武

Department of Mathematics, Princeton University, Princeton, NJ 08544, USA
E-mail: shouwu@princeton.edu

收稿日期: 2024-05-22; 接受日期: 2024-08-26; 网络出版日期: 2024-09-14

摘要　本文通过 Abel-Jacobi 映射、Poincaré 单值化和 Mumford 稳定投影嵌入给出曲线模空间上的度量化线丛的三种构造. 我们还描述了两个算术应用: 一个是袁新意关于一致 Bogomolov 猜想的应用, 另一个是我们与高紫阳合作关于 Gross-Shoen 闭链和 Ceresa 闭链的 Northcott 性质的应用.

关键词　Arakelov 度量　Poincaré 度量　adelic 度量

MSC (2020) 主题分类　11G50, 14G40

1　引言

在解析几何和线性代数中, 我们学习了二元二次方程在线性变换下的分类. 在复数域上只有一类; 在实数域上有三类: 椭圆型、双曲型和抛物型; 在有理数域上, 则有无穷多类; 这实际上是经典数论的主要课题. 当我在中山大学读本科时, 我偶然在数学系资料室读到一篇 1950 年代中国数学会访问苏联代表团的报告, 报告中提到, 对于复数域上的高次方程的分类, 我们需要多个参数, 这些参数构成了代数曲线的模空间. 后来在中国科学院数学研究所读硕士时, 我意识到这些模空间的研究是自 Bernhard Riemann 的 1851 年的博士论文开始的, 并在 19 世纪末 20 世纪初成为复分析和微分几何的一个重要课题.

代数曲线的算术模空间则是由 Deligne 和 Mumford[6] 在 1969 构造的. 1974 年, 作为代数曲面上的交点理论的算术类比, Arakelov[1] 引入了整数上曲线的相交理论, 并将高度重新解释为 Hermite 线丛的度. 10 年后, Faltings[8] 完备了这个理论. 此外, 作为他证明 Mordell 猜想[9] 的关键因素, Faltings 还引入了与 Hodge 丛相关的新的高度函数. 几年后, Deligne[5] 发展了 Hermite 线丛相对相交理论, 为曲线的算术模空间的研究提供了良好的框架. 这些研究统一了已知的代数、分析和几何理论.

英文引用格式: Zhang S. Calculus on arithmetic moduli of curves (in Chinese). Sci Sin Math, 2024, 54: 2059–2068, doi: 10.1360/SSM-2024-0167

本文总结了关于曲线模空间的算术相交理论的一些结果, 包括通过 Abel-Jacobi 映射、参数化和投影嵌入给出的三种度量化线丛的构造, 以及两个算术应用: 一个是袁新意关于一致 Bogomolov 猜想的应用, 另一个是我们与高紫阳合作关于 Gross-Schoen 闭链和 Ceresa 闭链的 Northcott 性质的应用. 最后这个课题是我 2023 年底访问中山大学时开始的. 我以此文献给中山大学百年校庆, 并借此机会谢谢母校给予我的美好的学习环境.

以下介绍本文的主要内容. 设 $g \geqslant 1$ 是一个整数, $\mathcal{M}_g$ 是亏格为 g 的曲线的模空间, $\overline{\mathcal{M}}_g$ 是 Deligne-Mumford 紧化空间, 其边界除子为

$$\Delta := \overline{\mathcal{M}}_g \setminus \mathcal{M}_g = \bigcup_{i=0}^{[g/2]} \Delta_i.$$

设 $\pi : \mathcal{C} \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}_g$ 是在 $\overline{\mathcal{M}}_g$ 上的稳定曲线的范族, ω 是相对对偶层. 在 $\mathrm{Pic}(\overline{\mathcal{M}}_g) = \mathrm{Ch}^1(\overline{\mathcal{M}}_g)$ 中, 我们有以下的类:

1. 边界除子类: $\delta_i := [\Delta_i]$, $\delta = [\Delta] = \sum_i \delta_i$;
2. Hodge 类: $\lambda_n := c_1(\det \pi_* \omega^n)$;
3. 相对对偶层的 Deligne 配对: $\mu := c_1(\langle \omega, \omega \rangle)$.

当 $g \geqslant 3$ 时, 根据 Harer[17] 和 Arabella 和 Cornable[2], $\mathrm{Pic}(\overline{\mathcal{M}}_g)$ 由 $\lambda := \lambda_1$ 和 Δ_i 生成. 如果 $g = 2$, 则 $\mathcal{M}_g$ 是仿射的, 并且 $\mathrm{Pic}(\overline{\mathcal{M}}_g)$ 由 Δ_i 生成. 此外, 我们有以下 Riemann-Roch 和 Noether 公式来关联这些类:

$$\lambda_n = \frac{n(n-1)}{2}\mu + \lambda, \quad 12\lambda = \mu + \delta.$$

Noether 公式由以下同构给出:

$$\alpha : \langle \omega, \omega \rangle \longrightarrow \det(\pi_* \omega)^{\otimes 12}.$$

$\mathcal{M}_g$ 上该同构在可以乘以 ± 1 的意义下是唯一的, 见 Mumford[20] 和 Moret-Bailly[19].

我们的第一个目标是回顾一些关于这些线丛上的规范度量的构造. 这些构造使用以下关于曲线的经典结果:

1. Abel-Jacobi: 这些曲线可以嵌入它们的 Jacobi 簇中;
2. Poincaré: 这些曲线可以被上半平面均匀化;
3. Mumford: 这些曲线可以稳定地嵌入射影空间中.

我们的第二个目标是描述两个应用:

1. 袁新意: 一致 Bogomolov 猜想的证明;
2. 我们与高紫阳的合作: Gross-Schoen 闭链和 Ceresa 闭链的 Northcott 性质.

2 Arakelov 度量

通过 Abel-Jacobi 映射, 选择一个基类 $\xi \in \mathrm{Pic}^1(C)$ 后, 每个复数域上的亏格为 $g \geqslant 1$ 的光滑投影曲线 C 都可以嵌入到其 Jacobi 簇 $\mathrm{Jac}(C)$ 中:

$$i_\xi : C \longrightarrow \mathrm{Jac}(C), \quad x \mapsto (x - \xi) \in \mathrm{Jac}(C).$$

在 $\mathrm{Jac}(C)$ 上, 存在着代表典范主极化的不变 Kähler 形式 h. h 的拉回给出了 C 上 Arakelov 度量 $d\mu_A$[1]. 放缩后, 我们可假设 $d\mu_A$ 体积为 1. 我们有用全纯 1- 形式表达的显式公式:

$$d\mu_A = \frac{\mathrm{i}}{2g}\sum_{i=1}^{g} \alpha_i \wedge \bar{\alpha}_i,$$

其中 i 代表虚数单位, $\alpha_1, \ldots, \alpha_g$ 是 $H^0(C, \omega_C)$ 的一组正交基, 即:

$$\frac{\mathrm{i}}{2}\int_C \alpha_i \wedge \bar{\alpha}_j = \delta_{ij}.$$

度量 $d\mu_A$ 在微分几何中也称为 Bergman 度量.

基于这个度量, Arakelov 在曲线 $C \times C$ 上构造了线丛 $\mathcal{O}(\Delta)$ 上的度量 $\|\cdot\|_\Delta$, 其相关的 Green 函数 $g_A(x,y) := -\log\|1\|_A(x,y)$ 作为 C 上的分布满足下列性质:

$$\frac{\partial_x \bar{\partial}_x}{\pi \mathrm{i}} g(x,y) = d\mu(x) - \delta_y(x).$$

这个度量在对角线的限制给出了 ω_C 上的度量, 其曲率再次与 $d\mu_A$ 成正比. 这是 Arakelov 度量的最重要特性之一, 因为它给出了 Arakelov 相交理论的伴随公式.

所有 ω_C 上的 Arakelov 范数定义了泛曲线 $\mathcal{C}$ 上的 Hermite 线丛 $\omega_A = (\omega, \|\cdot\|_A)$. 根据 Deligne[5], 我们还可得到度量化线丛 $\langle \omega_A, \omega_A \rangle$.

对于 Hodge 线 $\lambda_C = \det H^0(C, \omega_C)$, Faltings 使用了空间 $H^0(C, \omega_C)$ 上的 L^2- 范数, 即

$$\langle \alpha, \beta \rangle_{L^2} := \frac{\mathrm{i}}{2}\int_C \alpha \wedge \bar{\beta}.$$

通过典范同构 $\det H^0(C,\omega) = H^0(\mathrm{Jac}(C), \omega)$, 这个度量与 $H^0(\mathrm{Jac}(C), \omega)$ 上的 L^2- 范数一致. Faltings 的 δ 函数可以用 α 关于这两个度量化线丛的范数来定义:

$$\delta_F = -\log\|\alpha\|_{L^2 \to A}.$$

线丛 $\det \pi_* \omega_A$, $\langle \omega_A, \omega_A \rangle$ 上的度量不能延拓到边界. 对 $\det \pi_* \omega_A$, 情况只是轻微的, 因为它只有对数 - 对数奇点[3,8,10]. 例如, 对于光滑流形上的光滑映射 $f: X \longrightarrow D$, 其中 D 是复数单位圆盘, 使得在无心圆盘 $D^* = D \setminus \{0\}$ 上, $X_t = f^{-1}(t)$ 是亏格为 g 的光滑曲线, $X_0 = f^{-1}(0)$ 是半稳定的, 以及对于 D 上的 $\det \pi_* \omega_A$ 的一个截面 σ,

$$\log\|\sigma(t)\|_F \sim -\frac{b_1(\Gamma)}{2}\log(-\log|t|), \quad t \to 0, \tag{2.1}$$

其中 $b_1(\Gamma)$ 是 X_0 的对偶图 Γ 的第一个 Betti 数. 由此定义的高度是 Siegel 模空间上 Faltings 高度函数的限制. 它们在 Faltings 对 Tate 猜想、Shafarevich 猜想和 Mordell 猜想的证明中发挥了关键作用.

对于 μ, 情况更为严重, 因为它有对数奇点. 更准确地说, 对于上述的族 $f: X \longrightarrow D$, 对于 $\langle \omega, \omega \rangle$ 在 D 上的生成元 τ, de Jong[3] 证明了以下渐近公式:

$$\log\|\tau\|_A \sim -\epsilon_\Gamma \log|t|, \quad t \to 0, \tag{2.2}$$

其中 Γ 是 X_0 的对偶图, ϵ_Γ 是在文献 [30] 中定义的 ϵ- 不变量, 其负值 $-\epsilon(\Gamma)$ 是文献 [26] 定义的 r- 不变量. 因此, de Jong 证明了以下 δ 函数的渐近公式:

$$\delta_F(X_t) \sim -(\delta_\Gamma + \epsilon_\Gamma)\log|t| - 6b_1(\Gamma)\log(-\log|t|), \quad t \to 0,$$

其中 δ_Γ 是 X_0 的对偶图的长度. Faltings[10] 已将此结果扩展到多圆盘. 请参阅他们的论文以获取更多详细信息和参考文献.

在研究 Bogomolov 猜想[26] 时, 我们在定义在离散赋值域上的曲线上发现了 Arakelov 度量线丛的非阿基米德类比. 在证明一致 Bogomolov 猜想[24] 时, 袁新意在模空间上扩展了 ω_a 和 $\langle\omega_a, \omega_a\rangle$ 的构造. 请参见 第 5 节中我们的综述. 现在我们有个问题: 什么是 ω 上与 Deligne-Mumford 算术模空间整结构相匹配的*正确*度量? 这是下面两节的主要话题.

3 Poincaré 度量

根据 Poincaré 定理, 每个开或闭的双曲黎曼曲面 C 都可以由 Poincaré 上半平面 $\mathcal{H}$ 单值化, 因此具有面积为 1 的 Poincaré 度量:

$$d\mu_P = \mathrm{vol}(C)^{-1} \cdot \frac{dxdy}{y^2}.$$

在微分几何中, 此度量也称为常比例曲率度量. 我们可以将这个定义扩展到稳定曲线的光滑部分 C^{sm}, 它是一组双曲曲线的有限并集. 在泛族 $\mathcal{C} \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}_g(\mathbb{C})$ 的光滑局部 $\mathcal{C}^{sm}(\mathbb{C})$ 上, ω 每个纤维上的 Poincaré 度量在 $\mathcal{C}^{\mathrm{sing}}(\mathbb{C})$ 上具有对数 log-log 奇点. 这种形式的曲率流实际上是正的. 因此, 在算术模空间 $\mathcal{M}_g$ 上我们有一个 Hermite 线丛 $\langle\omega, \omega\rangle_P$.

更确切地说, 稳定曲线 C 定义了一组双曲曲线的有限并集, 并将其尖点的并集 Σ 分成点对 (σ^+, σ^-). $\Gamma(C, \omega_C)$ 是 $\Gamma(C, \Omega_C(\Sigma))$ 的子集, 其元素 α 满足如下性质: 对于 Σ 中的每对点 (σ^+, σ^-), 有 $\mathrm{Res}_{\sigma^+}\alpha + \mathrm{Res}_{\sigma^-}\alpha = 0$. 对于 $\sigma^+ \in \Sigma$, 我们有局部坐标 $q = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}(x+\sqrt{-1}y)}$, 使得 $d\mu_P$ 由上述公式给出. 此时 α 有表达式: $\alpha = f\frac{dq}{q}$, 其中 f 是 C 上的模形式, 其在尖点处的 q- 展开满足

$$a_{0,\sigma^+}(f) + a_{0,\sigma^-}(f) = 0.$$

f 的范数为 $\|\alpha\|^2 = (2g-2)^{-1}(\mathrm{i}f \wedge \bar{f})/d\mu = cy^2|f|^2$, 其中 c 是一个正常数.

现在我们将使用 Deligne 的公式来定义 $\langle\omega_C, \omega_C\rangle$ 上的度量. 我们需要加一些额外的要求. 更确切地说, 假设 α 和 β 是 ω 在 C 上的两个有理截面, 它们在每个尖点上都不为零, 并且它们的零点是不交的. 则 α, β 贡献了 ω 的一个截面. $\langle\alpha, \beta\rangle$ 的范数满足

$$\log\|\langle\alpha, \beta\rangle\|_P = (2g-2)\int_C \log\|\alpha\| d\mu_P + \log\|\beta\|(\mathrm{div}\alpha).$$

这个积分是收敛的. 当 C 变化时, 我们得到了一个度量化线丛 $\langle\omega_P, \omega_P\rangle$. 根据 Wolpert [23], $c_1(\langle\omega_P, \omega_P\rangle)$ 与 $\mathcal{M}_g(\mathbb{C})$ 上的 Weil-Peterson 度量成正比, 即定义在 $\Omega^1_{\mathcal{M}_g} = \pi_*\omega^2$ 上的度量

$$\langle\alpha, \beta\rangle_{WP} := -\int_C (\alpha \wedge \bar{\beta})/d\mu_P.$$

现在我们定义 $\mathcal{M}_g$ 上的 delta 函数为 $\delta_{\mathrm{PF}} = -\log\|\alpha\|_{L^2\to P}$. 使用 Deligne 的 Riemann-Roch[5], 这个 delta 不变量可以用 Qullen 的 Laplace 行列式来表达, 也可以用 Selberg 的 zeta 函数来表达:

$$Z(X,s)=\prod_{\gamma}\prod_{k=1}^{\infty}(1-\mathrm{e}^{(s+k)\ell(\gamma)}),$$

其中乘积是在 X 的简单、封闭、非定向测地线 γ 上进行的, $\ell(\gamma)$ 为 γ 的长度. $Z(X,s)$ 可亚纯延拓到整个复平面, 在 $s=1$ 处有一单零点. 我们有表达式:

$$\delta_{\mathrm{PF}}(X_t)=-6\log Z'(X,1).$$

详情请参见 Freixas[11].

在文献 [26] 中, 我们通过找到一个明确的公式发现除非 $g=1$, 否则 ϵ_Γ 为正. 在 Riemann 曲面上我们不指望这种正性, 尽管我们对 Poincaré 度量 $d\mu_P$ 的 Green 函数 $g_P(x,y)$ 有明确公式:

$$\frac{\partial_x\bar{\partial}_x}{\pi}g_P(x,y)=d\mu(x)-\delta_y(x).$$

引理 3.1 存在一个常数 $\gamma(C)$ 使得对于带有局部坐标 z 的任意 $x\in C$, 我们有如下表达式

$$\log\|dz\|_A(x)-\log\|dz\|_P(x)=\gamma(C)+(2g-2)\int_C g_P(x,y)d\mu_A(y).$$

此外, 我们有

$$\epsilon(C)=4(g-1)\gamma(C)+4(g-1)^2\int_{C^2}g_P(x,y)d\mu_A(x)d\mu_A(y).$$

证明 设 f 是 C 上的一个光滑函数, 定义为

$$f=\log\|dz\|_A-\log\|dz\|_P.$$

那么 $\frac{\partial\bar{\partial}}{\pi\mathrm{i}}f=(2g-2)(d\mu_P-d\mu_A)$. 因此 $f-(2g-2)\int_C g_P(x,y)d\mu_A(y)$ 是常数. 这证明了第一部分. 对于第二部分, 我们使用 $\omega_P=\omega_A(f)$. 因此

$$\begin{aligned}\epsilon(C)&=\omega_P^2-\omega_A^2=(\omega_P-\omega_A)(\omega_A+\omega_P)\\&=2(g-1)\int_C f(d\mu_A+d\mu_P).\end{aligned}$$

现在我们将第一部分带入得到第二部分即可完成证明. □

在写给 Deligne 的信[27] 和在波恩马克斯 · 普朗克数学研究所的一次演讲中[28], 在阿基米德位上, 我们提出 ω 上的 Poincaré 度量是 Deligne-Mumford 算术结构的更好类比, 因为它们都最小化了 Käher-Einstein 势能. 更确切地说, 对于数域 K 上任何亏格 g 的曲线 C, 我们考虑了所有 $(\mathcal{X},\bar{\mathcal{L}})$ 组成的集合 $\mathbb{L}$, 其中 $\mathcal{X}$ 是 C 在 $\mathcal{O}_K$ 上的正规模型, $\bar{\mathcal{L}}$ 是 $\mathcal{X}$ 上延拓 ω_C 的正 Hermite 线丛. 以 $\omega_{\bar{\mathcal{L}}}$ 代表 $\mathcal{X}/\mathcal{O}_K$ 的对偶纤维, 其度量由 $\bar{\mathcal{L}}$ 的曲率给出. 然后, 我们定义如下称为 Kähler-Einstein 势能的度量线丛:

$$\mathrm{KE}(\bar{\mathcal{L}})=\langle\bar{\mathcal{L}},2\omega_{\mathcal{L}}-\bar{\mathcal{L}}\rangle.$$

定理 3.1 (参见文献 [27,28]) 在恰当缩放度量 $\bar{\mathcal{L}}$ 后, $\mathbb{L}$ 上的函数 $\deg\mathrm{KE}(\bar{\mathcal{L}})$ 恰在 $\bar{\mathcal{L}}=\omega_P$ 时达到极小值.

我们将证明推迟到下一节.

4 平衡度量

根据 Mumford [20], 对于环 K 上任意亏格 $\geqslant 2$ 的稳定曲线 C, 以及整数 $n \geqslant 5$, 嵌入 $C \longrightarrow \mathbb{P}(H^0(C, \omega_C^n))$ 是 Chow 稳定的. 这表明 Chow 稳定性等价于 Deligne-Mumford 稳定性. 如果 $K = \mathbb{C}$, 那么根据文献 [29], $H^0(C, \omega_C^n)$ 在数乘意义下存在唯一的 Hermite 结构, 使得其在 $\omega_C^n = \mathcal{O}(1)|_C$ 上诱导度量 $\|\cdot\|_{\omega_C^n}$ 是平衡的, 即满足: 对于任何正交基 $s_1, \ldots, s_{N_n}$, 函数

$$\sum_i \|s_i(x)\|^2 = N_n = (2n-1)(g-1)$$

是 C 上常函数.

现在我们假设 K 是一个数域, 对于每个 $n \geqslant 3$, 我们考虑集合 $\mathbb{E}_n$, 其元素为 $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$ 上的带有同构 $\mathcal{E}_K \xrightarrow{\sim} H^0(C, \omega^n)$ 的 Hermite 线丛. 则 $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ 是 $\mathbb{P}(H^0(C, \omega_C^n))$ 的整模型, 并在 $\mathcal{O}(1)$ 上带有 Fubini-Study 度量. 设 $C_{\mathcal{E}}$ 是 $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ 中 C 的闭包, $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}^n$ 是 ω_C 的延拓, 使得 $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}^n$ 是带有 Fubini-Study 度量的 $\mathcal{O}(1)$ 的限制. 然后我们有 $\mathbb{Q}$- 丛:

$$\mathrm{GIT}_n(\mathcal{L}_{\mathcal{E}}) := \frac{\langle \mathcal{L}_{\mathcal{E}}^n, \mathcal{L}_{\mathcal{E}}^n \rangle}{2 \deg \omega_C^n} - \frac{\det \mathcal{E}}{\dim H^0(C, \omega_C^n)}.$$

我们在文献 [29] 中已经证明了, 这个丛的度在 $C_{\mathcal{E}}$ 是 Chow 半稳定的, 且丛 $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ 上的度量就是平衡度量时取到其最小值. 根据 Mumford [20], Chow 半稳定性等价于 Deligne-Mumford 半稳定性.

为了与 Poincaré 度量的能量 KE 进行比较, 我们将 $\deg \det \mathcal{E}$ 替换为线丛 $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ 的 Quillen 度量:

$$\mathrm{GIT}_n(\mathcal{L}_{\mathcal{E}}) := \frac{\langle \mathcal{L}_{\mathcal{E}}^n, \mathcal{L}_{\mathcal{E}}^n \rangle}{2 \omega_C^n} - \frac{\det H^0(C_{\mathcal{E}}, \mathcal{L}_{\mathcal{E}}^n)_Q - \tau(\mathcal{L}_{\mathcal{E}}^n)}{\dim H^0(C, \omega_C^n)},$$

其中 $\tau(\mathcal{L}_{\mathcal{E}}^n)$ 是 $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}^n$ 的解析挠度. 现在我们使用 Deligne 的 Riemann-Roch 得到

$$\begin{aligned} \mathrm{GIT}_n(\mathcal{L}_{\mathcal{E}}) &= \frac{\langle \mathcal{L}_{\mathcal{E}}^n, \mathcal{L}_{\mathcal{E}}^n \rangle}{4n(g-1)} - \frac{\langle \mathcal{L}_{\mathcal{E}}^n, \mathcal{L}_{\mathcal{E}}^n - \omega_{\mathcal{L}_{\mathcal{E}}} \rangle - \tau(\mathcal{L}_{\mathcal{E}}^n)}{2(2n-1)(g-1)} \\ &= \frac{n}{4(g-1)(2n-1)} (\mathrm{KE}(\mathcal{L}_{\mathcal{E}}) + 2\tau(\mathcal{L}_{\mathcal{E}}^n) n^{-1}). \end{aligned}$$

定理 3.1 的证明 这显然可约化为每个 K 赋值上的局部问题. 更确切地说, 我们将势能分解为局部能量的和:

$$\deg \mathrm{KE}(\bar{\mathcal{L}}) - \deg \mathrm{KE}(\omega_P) = \sum_v (\mathrm{KE}(\bar{\mathcal{L}}_v) - \mathrm{KE}(\omega_{P,v})),$$

其中对于每个 v, $\mathrm{KE}(\bar{\mathcal{L}}_v)$ 和 $\mathrm{KE}(\omega_{P,v})$ 具有相同的一般纤维 $\langle \omega_C, \omega_C \rangle$. 因此我们定义

$$\mathrm{KE}(\bar{\mathcal{L}}_v) - \mathrm{KE}(\omega_{P,v}) = -\log \frac{\|\cdot\|_{\mathrm{KE}(\bar{\mathcal{L}}_v)}}{\|\cdot\|_{\mathrm{KE}(\omega_{P,v})}}.$$

我们需要证明对于每个赋值 v, $\mathrm{KE}(\bar{\mathcal{L}}_v) \geqslant \mathrm{KE}(\omega_{P,v})$, 并且等号成立当且仅当 $\bar{\mathcal{L}}_v \omega_{P,v}^{-1}$ 为常数度量. 如果 v 是无限位, 设 $\mathcal{L}_v = \omega_{P,v}(\varphi_v)$. 那么 $\mathrm{KE}(\varphi_v)$ 就是 Mabuchi 函数. 因此 $\mathrm{KE}(\varphi_v) \geqslant 0$, 最小值 0 仅在常函数时达到.

对于非阿基米德位 v, 我们注意到对于 $n \geqslant 5$ 充分大, $\mathcal{L}_v^n$ 定义了一些 $\mathcal{X}_v$ 到射影空间 $\mathbb{P}(\mathcal{E}_v)$ 的嵌入, 其中 $\mathcal{E}_v = H^0(\mathcal{X}_v, \mathcal{L}_v^n)$. 则我们有

$$\mathrm{GIT}_n(\mathcal{L}_{\mathcal{E}_v}) - \mathrm{GIT}(\omega_{n,B,v}) = \frac{n}{4(g-1)(2n-1)}(\mathrm{KE}(\mathcal{L}_{\mathcal{E}_v}) - \mathrm{KE}(\omega_{B,n,v})).$$

注意到根据 Mumford [20], $\omega_{B,n,v}$ 和 $\omega_{P,v}$ 具有相同的整结构. 现在 $\mathrm{GIT}(\omega_{n,B,v})$ 的最小性意味着 $\mathrm{KE}(\mathcal{L}_{\mathcal{E}_v}) \geqslant \mathrm{KE}(\omega_{P,v}) \geqslant 0$, 等号成立当且仅当 $\mathcal{L}_{\mathcal{E}_v}\omega_{P,v}^{-1}$ 为常数度量. □

接下来, 我们提出一些通过带平衡度量的丛来逼近 ω_P 和 $\det \pi_*\omega_{L^2}$ 的想法. 这受到 Donaldson 在文献 [7] 中的结果的启发, 即平衡度量的曲率在每个光滑 Riemann 曲面上收敛到 Poincaré 度量.

首先, 我们调整 ω^n 上的平衡度量使得其在 $\langle \omega_C, \omega_C \rangle$ 上诱导度量与 Poincaré 度量的诱导度量一致. 因此, 我们在 $\mathcal{C}$ 上有一个明确定义的平衡度量线丛: $\omega_{B,n} = (\omega, \|\cdot\|_{B,n})$. 以下猜想描述了其在边界上的行为. 更确切地说, 考虑态射 $\pi : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{M}_g$ 沿其奇异部分 $\mathcal{C}^{\mathrm{sing}} \subset \mathcal{C}$ 的吹胀 $\widetilde{\mathcal{C}} \longrightarrow \mathcal{C}$, 设 $\widetilde{\mathcal{C}}^{\mathrm{sing}}$ 为例外除子. 则 $\mathcal{C}^{sm} := \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}^{\mathrm{sing}} = \widetilde{\mathcal{C}} \setminus \widetilde{\mathcal{C}}^{\mathrm{sing}}$. 设 g^{sing} 是例外除子 $\widetilde{\mathcal{C}}^{\mathrm{sing}}$ 的 Green 函数, 它在 $\mathcal{C}^{sm}$ 上处处为正.

猜想 4.1 对边界拓扑, 随着 $n \to \infty$, 平衡度量线丛 $\omega_{B,n}$ 在 $\mathcal{C} \setminus \mathcal{C}^{\mathrm{sing}}$ 上按以下意义收敛到 ω_P: 对于任何 $\epsilon > 0$, 存在依赖于 ϵ 的 $n(\epsilon)$, 使得对于任何 $n > n(\epsilon)$ 和 $\mathcal{C}^{sm}$ 上的任意点 x,

$$\left| \log \frac{\|\cdot\|_{B,n}}{\|\cdot\|_P}(x) \right| < \epsilon g^{\mathrm{sing}}(x).$$

现在对于每个稳定曲线 C, 我们通过平衡度量得到在 L^2- 范数的序列:

$$\langle s,t \rangle_{B,L^2,n} := \int_C \langle s,t \rangle_{B,n} d\mu_{B,n}, \quad s,t \in H^0(C, \omega_C),$$

其中 $d\mu_{B,n}$ 是由 $\omega_{B,n}$ 的曲率诱导的体积形式. 取行列式后, 我们得到了 $\det \pi_*\omega$ 上的度量 $\|\cdot\|_{B,L^2,n}$. 令 g^Δ 是边界 $\Delta \subset \overline{\mathcal{M}}_g$ 上的 Green 函数, 它在 $\mathcal{M}_g(\mathbb{C})$ 上的任何地方都是正的.

猜想 4.2 对边界拓扑, 随着 $n \to \infty$, 平衡度量线丛 $\pi_*\omega_{B,L^2,n}$ 在 $\mathcal{M}_g(\mathbb{C})$ 上按以下意义收敛到 $\pi_*\omega_{L^2}$: 对于任何 $\epsilon > 0$, 存在依赖于 ϵ 的 $n(\epsilon)$, 使得对于任何 $n > n(\epsilon)$ 和 $\mathcal{M}_g(\mathbb{C})$ 上的任意点 s,

$$\left| \log \frac{\|\cdot\|_{B,L^2,n}}{\|\cdot\|_{L^2}}(x) \right| < \epsilon g^\Delta(s).$$

5 Adelic 度量

使用图上的调和分析, 已经可以对定义在非阿基米德域上的曲线构造 Arakelov 度量 [26]. 作为应用, 已证明对于数域上的曲线 C, Bogomolov 猜想等价于 adelic 自交 $\langle \omega_C, \omega_C \rangle_a$ 的正性. 这个构造已由袁新意 [24] 扩展到 $\mathcal{C}/\mathcal{M}_g$. 作为应用, 袁新意证明了一致 Bogomolov 猜想. 在本节中, 我们回顾袁新意 [24] 的工作, 其关键是构造相对阿贝尔簇上的丰沛对称丛上的不变 adelic 度量.

为了简单起见, 我们考虑 (C, ξ) 的模空间 $\mathcal{M}_{g,\xi}$, 其中 C 是曲线, ξ 是使得 $(2g-2)\xi = \omega_C$ 的直线丛. 则 $\mathcal{M}_{g,\xi}$ 在 $\mathcal{M}_g$ 上是有限且平坦的, 其次数为 $(2g-2)^{2g}$. 记 $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{M}_{g,\xi}$ 为泛曲线, $\mathcal{J}$ 为其 Jacobi 簇, 则我们有嵌入 $i : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{J}$. 在 $\mathcal{J} \times_{\mathcal{M}_{g,\xi}} \mathcal{J}$ 上, 有 Poincaré 丛 $\mathcal{P}$. 令 $\mathcal{P}^\Delta$ 为 $\mathcal{P}$ 在对角线 $\mathcal{J}$ 上的限制, 则 $2\mathcal{P} = m^*\mathcal{P}^\Delta - p_1^*\mathcal{P}^\Delta - p_2^*\mathcal{P}^\Delta$. 注意到 $\mathcal{P}^\Delta$ 是相对丰沛且对称的.

我们将对泛族 $\pi: \mathcal{J} \to \mathcal{M}_g$ 及固定同构 $[2]^*\mathcal{P}^\Delta \xrightarrow{\sim} (\mathcal{P}^\Delta)^4$ 使用 Tate 算法在 $\mathcal{P}^\Delta$ 上构造一个 adelic 度量. 通过这个固定的同构, 我们等同这两个线丛. 固定在 $\bar{\mathcal{M}}_g$ 上 Hermitian 丰沛线丛 $\mathcal{N}$. 则 $\mathcal{P}_0^\Delta := \mathcal{P}^\Delta + \pi^*\mathcal{N}$ 在 $\mathcal{J}$ 上是丰沛的. 因此, 对于某个 $e_0 \in \mathbb{N}$, 有嵌入 $j: \mathcal{J} \longrightarrow \mathbb{P}^N$ 使得 $j^*\mathcal{O}(1) = (\mathcal{P}_0^\Delta)^{e_0}$. 令 $j: \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{J}_0$ 为 $\mathcal{J}$ 的 Zariski 闭包. 现在, 对于任何 $n \in \mathbb{N}$, 我们令 $f_n: \mathcal{J}_n \longrightarrow \mathcal{J}_0$ 为以下复合映射的正规化

$$\mathcal{J} \xrightarrow{[2^n]} \mathcal{J} \xrightarrow{j} \mathcal{J}_0.$$

则所有 $\mathcal{J}_n$ 都是 $\mathcal{J}$ 的紧化. 我们还定义线丛 $\mathcal{P}_n^\Delta = \frac{1}{4^n} f_n^* \mathcal{P}_0^\Delta$. 在 $\mathcal{J}$ 上这个丛是 $\mathcal{P}^\Delta + 4^{-n}\pi^*\mathcal{N}$. 这些在 $\mathcal{J}_n$ 上的丛在边界拓扑中是一个 Cauchy 序列, 从而在 Zariski-Riemann 空间 $\widehat{\mathcal{J}}$ 上定义了一个 adelic 线丛. 其极限 $\mathcal{P}_a^\Delta$ 是一个 nef 丛, 不依赖于 $\mathcal{N}$ 和到 $\mathbb{P}^N$ 中初始嵌入的选择. 它是使得 $[2]^*\mathcal{P}_a^\Delta \xrightarrow{\sim} (\mathcal{P}_a^\Delta)^4$ 的唯一 adelic 线丛. 现在我们可以在 Poincaré 丛上配备 adelic 度量:

$$\mathcal{P}_a := \frac{1}{2}(m^*\mathcal{P}_a^\Delta - p_1^*\mathcal{P}_a^\Delta - p_2^*\mathcal{P}_a^\Delta).$$

对于 Bogomolov 猜想的应用, 我们用 $i^*\mathcal{P}^\Delta$ 来表达 ω. 更准确地, 通过观察 Néron-Tate 高度, 我们有 $i^*\mathcal{P}^\Delta = 2g\xi - \pi^*\langle\xi,\xi\rangle$. 由此,

$$\omega = \left(1 - \frac{1}{g}\right) i^*\mathcal{P}^\Delta + \frac{1}{4g^2}\langle i^*\mathcal{P}^\Delta, i^*\mathcal{P}^\Delta\rangle,$$
$$\langle\omega,\omega\rangle = \left(1 - \frac{1}{g}\right)\langle i^*\mathcal{P}^\Delta, i^*\mathcal{P}^\Delta\rangle.$$

现在我们定义 adelic 度量线丛

$$\omega_a = \left(1 - \frac{1}{g}\right) i^*\mathcal{P}_a^\Delta + \frac{1}{4g^2}\langle i^*\mathcal{P}_a^\Delta, i^*\mathcal{P}_a^\Delta\rangle.$$

由此, 我们在 $\mathcal{M}_g$ 上有一个 adelic 直线丛: $\langle\omega_a,\omega_a\rangle = (1 - \frac{1}{g})\langle i^*\mathcal{P}_a^\Delta, i^*\mathcal{P}_a^\Delta\rangle$.

以下是关于这些丛的正性的第一个主要结果:

定理 5.1 (袁新意[24]) 丛 $\langle\omega_a,\omega_a\rangle$ 是 nef 且大的.

由此, 袁新意证明了统一 Bogomolov 猜想的以下版本:

定理 5.2 (袁新意[24]) 存在常数 $c_1, c_2 > 0$, 使得对于任何 (C,α), 其中 C 是定义在 $\bar{\mathbb{Q}}$ 上的亏格为 g 的曲线, $\alpha \in \mathrm{Pic}^1(C)$,

$$\#\{x \in C(\bar{\mathbb{Q}}), h_{\mathrm{NT}}(x-\alpha) \leqslant c_1(h_{\mathrm{Fal}}(C) + h_{\mathrm{NT}}((2g-2)\alpha - \omega_C))\} < c_2.$$

当 $\alpha \in C(\bar{\mathbb{Q}})$ 时, 这个不等式没有 $h_{\mathrm{NT}}((2g-2)\alpha - \omega_C)$ 项的版本已由 Kühne 证明. 请参阅袁新意[24] 以获取更多细节和参考文献.

6 三重积度量

对于定义在域 k 上的曲线 C 和类 $\xi \in \mathrm{Pic}^1(C)$, Gross 和 Schoen[14] 在三重积 C^3 中构造了一个同调平凡的 Chow 链 $\mathrm{GS}(C) := \Delta_\xi(C) \in \mathrm{Ch}^2(C^3)$. 当 k 是数域时, Gross 和 Schoen 给出 $\mathrm{GS}(C)$ 的 Beilinson-Bloch 高度配对 $\langle\Delta_\xi(C), \Delta_\xi(C)\rangle_{\mathbb{B}}$. 在文献 [30] 中, 我们证明了这个高度与 Ceresa 链

$$\mathrm{Ce}(C) := i_\xi(C) - [-1]^* i_\xi(C) \in \mathrm{Ch}_1(\mathrm{Jac}(C))$$

的高度以及文献 [26] 中构造的相交数 $\langle \omega_C, \omega_C \rangle_a$ 有明确的联系. 在我们和高紫阳最近的工作 [12] 中, 这个构造已经被扩展到模空间 $\mathcal{M}_{g,\xi}$ 上. 作为一个应用, 我们证明了 Gross-Schoen 链和 Ceresa 链的 Northcott 性质. 在本节中, 我们回顾这项工作.

我们从上一节构造的 adelic Poincaré 丛 $\mathcal{P}_a$ 开始将其拉回到曲线的纤维积 $\mathcal{C} \times_{\mathcal{M}_{g,\xi}} \mathcal{C}$ 上得到线丛

$$\mathcal{Q}_a = (i \times i)^* \mathcal{P}_a = \mathcal{O}(p_1^* \xi_a + p_2^* \xi_a - \Delta_a),$$

其中下标 a 表示可容度量. 那么我们有一个三重积线丛: $\mathcal{L}_a := \langle \mathcal{Q}_a, \mathcal{Q}_a, \mathcal{Q}_a \rangle$. 这个丛的高度计算了 Gross-Schoen 链和 Ceresa 链的 Beilinson-Bloch 高度.

实际上, 不考虑度量, 这个丛下降到 $\mathcal{M}_g$ 上的一个 $\mathbb{Q}$- 线丛, 其可表示为

$$\langle \mathcal{Q}, \mathcal{Q}, \mathcal{Q} \rangle = \frac{2g+1}{2g-2} \langle \omega, \omega \rangle = \frac{6(2g+1)}{g-1} \det \pi_* \omega.$$

这些度量的差异因此在 $\mathcal{M}_g(\mathbb{C})$ 上或者在亏格 g 的极化图的模空间上定义了一些函数 φ 和 λ. de Jong 和 Shokrieh[4] 研究了这些函数在一维基上的渐近行为, 而宋寅翀[21] 在高维基所对应的图上研究了它们的渐近行为. 注意到, $\mathcal{M}_g(\mathbb{C})$ 上的函数 φ 也由 Kawazumi 独立发现.

从 $\mathcal{L}_a$ 的度量直线丛也由袁新意[24] 以稍微不同的方式构造. 他还提出了关于其 nef 性和大性的疑问. 我们在文献 [12] 中证明了其一般纤维 $\widetilde{\mathcal{L}}_a$ 的体积是大的. 因此, 我们有以下不等式:

定理 6.1 对于每个 $g \geqslant 3$, 存在 $\mathbb{Q}$ 上的非空 Zariski 开子簇 U, 以及存在正数 ϵ 和 c, 使得对于任何 $s \in U(\bar{\mathbb{Q}})$,

$$\langle \mathrm{GS}(\mathcal{C}_s), \mathrm{GS}(\mathcal{C}_s) \rangle_{\mathbb{B}} \geqslant \epsilon h_{\mathrm{Fal}}(s) - c,$$
$$\langle \mathrm{Ce}(\mathcal{C}_s), \mathrm{Ce}(\mathcal{C}_s) \rangle_{\mathbb{B}} \geqslant \epsilon h_{\mathrm{Fal}}(s) - c,$$

其中 h_{Fal} 是 $\mathcal{M}_g(\bar{\mathbb{Q}})$ 上的 Faltings 高度.

通过结合文献 [25] 中的结果, 我们有以下结论.

定理 6.2 对于每个 $g \geqslant 3$, 存在 $\mathbb{Q}$ 上非空 $\mathcal{M}_g$ 的 Zariski 开子簇 U, 使得对于任何 $H, D \in \mathbb{R}$,

$$\#\{s \in U(\bar{\mathbb{Q}}),\ \deg s < D,\ \langle \mathrm{GS}(\mathcal{C}_s), \mathrm{GS}(\mathcal{C}_s) \rangle_{\mathbb{B}} < H\} < \infty,$$
$$\#\{s \in U(\bar{\mathbb{Q}}),\ \deg s < D,\ \langle \mathrm{Ce}(\mathcal{C}_s), \mathrm{Ce}(\mathcal{C}_s) \rangle_{\mathbb{B}} < H\} < \infty,$$

并且对于任何 $s \in U(\mathbb{C}) \setminus U(\bar{\mathbb{Q}})$, $\mathrm{GS}(\mathcal{C}_s)$ 和 $\mathrm{Ce}(\mathcal{C}_s)$ 都是非挠的.

致谢 感谢中国科学院数学与系统科学研究院田野研究员、北京大学袁新意教授和审稿人对本文初稿提出的许多修改意见. 本文最后一节的工作是作者在 2023 年 12 月 14 至 17 日在中山大学访问时开始的. 作者特别感谢中山大学朱熹平教授和陈兵龙教授的热情接待.

参考文献

1 Arakelov S. Intersection theory of divisors on an arithmetic surface. Math USSR Izv, 1974, 8: 1167–1180
2 Arbarello E, Cornalba M. The Picard groups of the moduli spaces of curves. Topology, 1987, 26: 153–171
3 de Jong R. Faltings delta-invariant and semistable degeneration. J Differential Geom, 2019, 111: 241–301
4 de Jong R, Shokrieh F. Jumps in the height of the Ceresa cycle. J Differential Geom, 2024, 126: 169–214
5 Deligne P. Le déterminant de la cohomologie (in French). [The determinant of the cohomology.] In: Current Trends in Arithmetical Algebraic Geometry. Contemp Math, vol. 67. Providence: Amer Math Soc, 1987, 93–177

6 Deligne P, Mumford D. The irreducibility of the space of curves of given genus. Publ Mat IHÉS, 1965, 36: 75–109
7 Donaldson S. Scale curvatures and projective embeddings I. J Differential Geom, 2001, 59: 479–522
8 Faltings G. Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern. Invent Math, 1983, 73: 349–366
9 Faltings G. Calculus on arithmetic surfaces. Ann of Math (2), 1984, 119: 387–424
10 Faltings G. Arakelov geometry on degenerating curves. J Reine Angew Math, 2021, 771: 65–84
11 Freixas Montplet G. An arithmetic Riemann-Roch theorem for pointed stable curves. Ann Sci Éc Norm Supér (4), 2009, 42: 335–369
12 Gao Z, Zhang S. Height pairing for algebraic cycles in families. Manuscript, 2024
13 Gillet H, Soulé C. Arithmetic intersection theory. Pub Math IHÉS, 1990, 72: 94–174
14 Gross B, Schoen C. The modified diagonal cycle on the triple product of a pointed curve. Ann Inst Fourier (Grenoble), 1995, 45: 649–679
15 Hain R. Biextensions and heights associated to curves of odd genus. Duke Math J, 1990, 61: 859–898
16 Hain R. Notes on the normal functions of the Ceresa cycle. Manuscript, 2024
17 Harer J. The second homology group of the mapping class group of an orientable surface. Invent Math, 1983, 72: 221–239
18 Harris J, Morrison I. Moduli of Curves. Graduate Texts in Mathematics, vol. 187. New York: Springer-Verlag, 1998
19 Moret-Bailly L. La formule de Noether pour les surfaces arithméetiques. Invent Math, 1989, 98: 491–498
20 Mumford D. Stability of projective varieties. In: Monographie de L'Enseignement Mathématique, no. 24. Geneva: L'Enseignement Mathématique, 1977, 74 pp
21 Song Y. Asymptotic behavior of the Zhang-Kawazumi's φ-invariants. Adv Math, 2023, 435: 109349
22 Wilms R. New explicit formulas for Faltings' delta-invariant. Invent Math, 2017, 209: 481–539
23 Wolpert S A. The hyperbolic metric and the geometry of the universal curve. J Differential Geom, 1990, 31: 417–472
24 Yuan X. Arithmetic bigness and a uniform Bogomolov-type result. arXiv:2108.05625, 2021
25 Yuan X, Zhang S. Adelic line bundles over quasi-projective varieties. arXiv:2105.13587, 2021
26 Zhang S. Admissible pairing on a curve. Invent Math, 1993, 112: 171–193
27 Zhang S. A letter to P. Deligne. February 3rd, 1994
28 Zhang S. Height and reduction of a semistable variety. In: The MPIM Preprint Series for the 1994 Arakelov Theory Conference. Bonn: Max Planck Institute for Mathematics, 1994, 37–41
29 Zhang S. Heights and reductions of semi-stable varieties. Compos Math, 1996, 104: 77–105
30 Zhang S. Gross-Schoen cycles and dualising sheaves. Invent Math, 2010, 179: 1–73

Calculus on arithmetic moduli of curves

Shouwu Zhang

Abstract We survey three constructions of metrized line bundles on the moduli of curves by means of Abel-Jacobi maps, uniformizations, and projective embeddings. We also describe two arithmetic applications: one to the uniform Bogomolov conjecture by Xinyi Yuan and the other to the Northcott property for Gross-Schoen cycles and Ceresa cycles.

Keywords Arakelov metric, Poincaré metric, adelic metric

MSC(2020) 11G50, 14G40

doi: 10.1360/SSM-2024-0167