

Prefácio

Estas notas foram preparadas para servir como texto base do minicurso *Teoria min-max: existência de hipersuperfícies mínimas* a ser ministrado na XIX Escola de Geometria Diferencial.

Subvariedades mínimas estão entre os objetos de estudo mais importantes em geometria diferencial. Elas são pontos críticos do funcional de volume de dimensão apropriada; comprimento no caso de curvas, ou área no caso de superfícies. Euler e Lagrange foram os primeiros a considerá-las, provando que se o gráfico de uma função u de classe C^2 é mínimo, então u é solução de uma equação diferencial parcial quasilinear elíptica de segunda ordem. Geometricamente, subvariedades mínimas são caracterizadas pelo anulamento da curvatura média; um fato observado por Meusnier.

Resultados sobre a existência de subvariedades mínimas desempenham um papel fundamental no desenvolvimento da teoria.

A maneira mais natural de produzir tais objetos é minimizando o volume em uma classe fixa de subvariedades. Esta ideia foi aplicada em vários contextos: em uma classe de subvariedades com mesmo bordo (Problema de Plateau), ou em uma classe de homologia, ou na classe de subvariedades com bordo Σ contidas em um mesmo domínio e com $\partial\Sigma$ contido no bordo do domínio (Problema de fronteira livre).

Também existem subvariedades mínimas que não são minimizantes locais de volume. Na esfera Euclideana $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, por exemplo, as subvariedades mínimas fechadas unidimensionais (geodésicas) são grandes círculos, os quais podem ser facilmente deformados a curvas próximas de menor comprimento.

Existem duas abordagens básicas sobre a construção de subvariedades mínimas que não são minimizantes de volume. A primeira consiste em aplicar Teoria de Morse para o funcional energia no espaço de aplicações de uma superfície fixa na variedade ambiente. Este método foi explorado por vários autores: Sacks e Uhlenbeck [23, 24], Micallef e Moore [20], e Fraser [10].

O segundo método, o qual é o objeto de estudo central destas notas, consiste em um argumento min-max para o volume de dimensão n sobre classes de *sweepouts* da variedade ambiente, a qual tem dimensão $n + 1$. Intuitivamente, *sweepouts* são famílias de hipersuperfícies que varrem todo o ambiente. A técnica min-max foi inspirada no trabalho de Birkhoff [3] sobre a existência de geodésicas fechadas em esferas Riemannianas bidimensionais, uma questão proposta por Poincaré.

Em dimensões mais altas, o método foi introduzido por Almgren. Entre as décadas de 1960-80, a teoria foi aperfeiçoada por Pitts [22], culminando na prova do fato de que toda variedade Riemanniana fechada M de dimensão $n+1$, com $2 \leq n \leq 5$, admite pelo menos uma hipersuperfície mínima suave, fechada e mergulhada. Este resultado foi estendido por Schoen e Simon para $n \geq 6$. No caso $n > 6$, a hipersuperfície mínima produzida pode ter um conjunto singular pequeno (de codimensão de Haurdorff pelo menos 7). Em geral, os objetos que compõem os *sweepouts* não são regulares, a descrição da teoria usa objetos e técnicas da Teoria Geométrica da Medida.

A teoria min-max de Almgren e Pitts tem sido aplicada para resolver problemas profundos em geometria. Dentre as aplicações, destacam-se a prova da conjectura de Willmore, por Codá Marques e Neves [17]; a prova da conjectura de Freedman, He e Wang sobre a energia de links em \mathbb{R}^3 , por Agol, Codá Marques e Neves [1]; a existência de uma infinidade de hipersuperfícies mínimas fechadas e mergulhadas em variedades fechadas com curvatura de Ricci positiva, por Codá Marques e Neves [18]; uma prova da extinção em tempo finito do fluxo de Ricci em variedades homotópicamente equivalentes à esfera tridimensional, por Colding e Minicozzi [5, 6].

Uma abordagem tridimensional do método min-max foi desenvolvida por Simon e Smith [26], e revisitada por Colding e De Lellis [4], De Lellis e Pellandini [7], e Ketover [15]. Esta variante tem a vantagem de que as fatias que formam os *sweepouts* são mais simples; cada uma delas é uma superfície suave fora de um conjunto finito de pontos. Isto permite entender melhor a topologia da superfície produzida.

Recentemente, outras duas abordagens da teoria min-max foram desenvolvidas por De Lellis e Tasnady [8] e Guaraco [12]. A variante proposta por Guaraco usa a teoria de EDPs e a hipersuperfície mínima obtida é um limite de soluções da equação diferencial de Allen-Cahn.

Um ponto delicado da técnica, que vai além da teoria de existência, é o estudo da hipersuperfície min-max. Ela é obtida como o limite de uma sequência fatias de *sweepouts* no sentido de varifolds. Esta noção fraca de convergência permite que o limite min-max seja desconexo e que cada componente tenha uma multiplicidade inteira. Recentemente, Codá Marques e Neves provaram as primeiras estimativas globais sobre o índice de Morse e a multiplicidade das componentes instáveis desse objeto.

Para mais detalhes sobre estes e outros desenvolvimentos da teoria, veja [16], [21] e suas referências.

Estas notas são compostas de 4 capítulos, os quais estão organizados da seguinte maneira. No Capítulo 1, apresentamos uma breve introdução sobre subvariedades mínimas e varifolds. No Capítulo 2, provamos a existência de geodésicas fechadas minimizantes em superfícies de gênero $g \geq 1$ e apresentamos a prova do teorema de Birkhoff. No Capítulo 3, apresentamos a variante suave da teoria min-max. No Capítulo 4, apresentamos o resultado de Codá Marques e Neves sobre a existência de infinitas hipersuperfícies mínimas em variedades com curvatura de Ricci positiva.

Sumário

Prefácio	1
Capítulo 1. Preliminares	4
1. Subvariedades mínimas	4
2. Varifolds	9
Capítulo 2. Existência de geodésicas fechadas	13
1. Geodésicas minimizantes	13
2. Geodésicas min-max	15
Capítulo 3. Teoria min-max	21
1. Teoria min-max suave	22
2. Deformação <i>pull-tight</i> de varifolds	25
3. Argumento combinatório	30
4. Regularidade	35
Capítulo 4. Existência de infinitas hipersuperfícies mínimas	40
1. <i>Flat chains</i> mod 2	41
2. Topologia do espaço $\mathcal{Z}_n(M; \mathbb{Z}_2)$	45
3. <i>p-sweepouts</i>	47
4. <i>p-width</i>	50
5. Estimativas das <i>p-widths</i>	52
6. Existência de infinitas mínimas	54
Bibliografia	58

CAPÍTULO 1

Preliminares

Neste capítulo, apresentamos algumas noções e fatos preliminares sobre subvariedades mínimas e varifolds. O conteúdo aqui apresentado será usado no desenvolvimento dos capítulos 3 e 4.

1. Subvariedades mínimas

Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana e Σ^k uma subvariedade de dimensão k de M , possivelmente com bordo. Usamos a notação \mathcal{H}^k para a medida de Hausdorff de dimensão k de M , a qual coincide com o volume de dimensão k para subvariedades.

Considere um sistema de coordenadas (x_1, \dots, x_k) em Σ e sejam

$$g_{ij}(x) = g(\partial/\partial x^i, \partial/\partial x^j),$$

$i, j \in \{1, \dots, k\}$, as componentes da métrica Riemanniana g restrita a Σ . O elemento de volume de Σ é a k -forma diferencial

$$d\Sigma(x) = \sqrt{\det(g_{ij}(x))} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k,$$

de modo que $\mathcal{H}^k(\Sigma) = \int_{\Sigma} d\Sigma$.

Considere variações de Σ em M dadas por aplicações diferenciáveis

$$F : \Sigma \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$$

tais que $F(\cdot, 0) = id_{\Sigma}$, e $\Sigma_t = F(\Sigma, t)$ é uma subvariedade de dimensão k de M , para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Sendo assim, F pode ser interpretada como uma deformação de Σ na direção do campo $X(x) = \partial F / \partial t(\cdot, 0)$.

Veremos a seguir que a primeira derivada do volume $\mathcal{H}^k(\Sigma_t)$ com respeito a variável t tem uma fórmula simples em termos do campo variacional X . Para tanto, usaremos a seguinte notação.

DEFINIÇÃO 1.1. Seja X um campo de vetores diferenciável ao longo de Σ^k , a valores em M ; ou seja, $X(x)$ está definido para todo $x \in \Sigma$ como um vetor em $T_x M$. Definimos a divergência de X em Σ como a função dada por

$$\operatorname{div}_{\Sigma} X = \sum_{i=1}^k g(\nabla_{e_i} X, e_i),$$

onde $\{e_1, \dots, e_k\} \subset T_x \Sigma$ é uma base ortonormal e ∇ denota a conexão de Levi-Civita da métrica Riemanniana g . Observe que a divergência pode ser

escrita em um sistema de coordenadas como

$$\operatorname{div}_{\Sigma} X = \sum_{i,j=1}^k g^{ij} g(\nabla_{e_i} X, e_j).$$

PROPOSIÇÃO 1.2. *Sejam M^n uma variedade Riemanniana, $\Sigma^k \subset M$ uma subvariedade e $F : \Sigma \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ uma variação diferenciável de $\Sigma = F(\Sigma, 0)$ por subvariedades $\Sigma_t = F(\Sigma, t)$ de dimensão k . Temos*

$$\frac{d}{dt} \mathcal{H}^k(\Sigma_t) = \int_{\Sigma_t} \operatorname{div}_{\Sigma_t} (\partial F / \partial t(x, t)) d\Sigma_t(x).$$

PROVA. A fim de verificar a fórmula acima, usaremos que o volume de Σ_t coincide com a integral da forma de volume $d\Sigma_t$ e a expressão em coordenadas da última. Sabemos que, em qualquer sistema de coordenadas (x_1, \dots, x_k) em Σ ,

$$d\Sigma_t(x) = \sqrt{\det(g_{ij}(x, t))} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k,$$

onde

$$g_{ij}(x, t) = g(\partial_i F(x, t), \partial_j F(x, t))$$

e $\partial_i F = \partial F / \partial x^i$. Logo, é suficiente mostrar que

$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{\det(g_{ij}(x, t))} = \operatorname{div}_{\Sigma_t} (\partial F / \partial t(x, t)) \sqrt{\det(g_{ij}(x, t))}.$$

A identidade chave na verificação de (1) é

$$\frac{\partial}{\partial t} \det(g) = \operatorname{tr}(g^{-1} \partial_t g) \cdot \det(g),$$

onde $g^{-1} = (g^{ij})$ representa a matriz inversa da métrica Riemanniana g . Portanto, (1) é consequência da relação acima e do fato de que

$$\partial_t g_{ij}(x, t) = g(\nabla_{\partial_i F}(\partial F / \partial t), \partial_j F) + g(\nabla_{\partial_j F}(\partial F / \partial t), \partial_i F).$$

Esta expressão é consequência da compatibilidade com a métrica Riemanniana e da simetria de ∇ . O que encerra a demonstração. \square

A fim de apresentar uma caracterização geométrica para as subvariedades que são pontos críticos do volume de dimensão k , introduzimos os seguintes objetos.

DEFINIÇÃO 1.3. Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana e $\Sigma^k \subset M$ uma subvariedade. Para cada $p \in \Sigma$, definimos a segunda forma fundamental de $\Sigma \subset M$ por

$$B(V, W) = \nabla_V W - (\nabla_V W)^T = (\nabla_V W)^N,$$

para todo $V, W \in T_p \Sigma$, onde os índices T e N denotam as componentes tangente e normal a Σ , respectivamente.

B é um tensor simétrico. O segundo objeto geométrico importante nessa apresentação é o vetor curvatura média de Σ .

DEFINIÇÃO 1.4. Seguindo a mesma notação da definição anterior, definimos o vetor curvatura média de Σ em p pela expressão

$$\vec{H}_\Sigma(p) = \text{tr}_\Sigma B = \sum_{i=1}^k B(e_i, e_i),$$

onde $\{e_1, \dots, e_k\} \subset T_p \Sigma$ é uma base ortonormal.

A primeira derivada do volume $\mathcal{H}^k(\Sigma_t)$ pode ser escrita em termos do vetor curvatura média de Σ . Este é o conteúdo da seguinte proposição.

PROPOSIÇÃO 1.5. *Sejam $\Sigma^k \subset M$ uma subvariedade, possivelmente com bordo, e $F : \Sigma \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ uma variação diferenciável de $\Sigma = F(\Sigma, 0)$ por subvariedades $\Sigma_t = F(\Sigma, t)$ de dimensão k . Temos*

$$\frac{d}{dt} \mathcal{H}^k(\Sigma_t) = - \int_{\Sigma_t} g \left(\frac{\partial F}{\partial t}(\cdot, t), \vec{H}_{\Sigma_t} \right) d\Sigma_t + \int_{\Sigma_t} g \left(\frac{\partial F}{\partial t}(\cdot, t), \nu \right) d\sigma_t,$$

onde $\nu(x) \in T_x \Sigma$ denota o vetor unitário conormal a $\partial \Sigma$ e apontando para fora de Σ , e $d\sigma_t$ denota a $(k-1)$ -forma de volume de $\partial \Sigma$.

PROVA. Seja X um campo de vetores ao longo de Σ^k . Escreva $X(p) = X^T(p) + X^N(p)$, para todo $p \in \Sigma$. Os índices T e N denotam as componentes tangentes e normais a $T_p \Sigma$, respectivamente. Observe que

$$\text{div}_\Sigma X = \text{div}_\Sigma X^T + \text{div}_\Sigma X^N = \text{div}_\Sigma X^T - g(X, \vec{H}_\Sigma).$$

De fato, se $\{e_1, \dots, e_k\} \subset T\Sigma$ é referencial ortonormal local, então

$$\begin{aligned} g(\nabla_{e_i} X^N, e_i) &= e_i(g(X^N, e_i)) - g(X^N, \nabla_{e_i} e_i) \\ &= -g(X, (\nabla_{e_i} e_i)^N), \end{aligned}$$

para todo $1 \leq i \leq k$. Somando em i , obtemos a relação desejada. Aplicando a fórmula obtida na Proposição 1.2, temos

$$\frac{d}{dt} \mathcal{H}^k(\Sigma_t) = \int_{\Sigma_t} \text{div}_{\Sigma_t} \left((\partial F / \partial t)^T \right) d\Sigma_t - \int_{\Sigma_t} g \left(\frac{\partial F}{\partial t}(\cdot, t), \vec{H}_{\Sigma_t} \right) d\Sigma_t.$$

Para concluir a prova, basta aplicar o Teorema da divergência na primeira parcela do lado direito da expressão acima. \square

Em seguida, apresentamos alguns exemplos de subvariedades mínimas.

EXEMPLO 1.6. A imagem de uma curva diferenciável $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ parametrizada por comprimento de arco, $|\gamma'| = 1$, é uma subvariedade mínima se, e somente se, a segunda forma fundamental B é identicamente nula. O que equivale a

$$(\nabla_{\gamma'} \gamma')^N = B(\gamma', \gamma') = 0.$$

Diferenciando $\langle \gamma', \gamma' \rangle \equiv 1$, concluímos que a derivada covariante de γ' sempre é normal a γ . Portanto, a imagem do caminho γ é uma subvariedade mínima se, e só se, γ é geodésica, i.e., $\nabla_{\gamma'} \gamma' = 0$.

EXEMPLO 1.7. Seja $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 definida em um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. A hipersuperfície de \mathbb{R}^{n+1} dada pelo gráfico de u , $\text{Graf}_u = \{(x, u(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \Omega\}$, é uma subvariedade mínima se, e somente se, u é solução da seguinte equação diferencial parcial quasilinear elíptica de segunda ordem:

$$\text{div}_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) = 0.$$

Pela descrição acima, sabemos que quando estes gráficos são subvariedades mínimas, então eles são pontos críticos do volume de dimensão n para variações que fixam o bordo. Mas pode ser que o ponto crítico não seja um mínimo local. Por outro lado, é fato que se o domínio Ω é convexo, então o gráfico mínimo é minimizante de área.

Na esfera Euclideana $S^3 = \{x \in \mathbb{R}^4 : |x| = 1\}$, existem superfícies mínimas fechadas de gênero g , para todo $g \geq 0$. Porém, nenhuma delas é minimizante local de área. Em geral, nenhuma variedade Riemanniana M^n de curvatura de Ricci positivo admite hipersuperfícies mínimas fechadas que dividem M em duas componentes e são minimizantes locais de volume. A saber, se $\Sigma^{n-1} \subset M$ é uma hipersuperfície mínima e $M \setminus \Sigma$ tem duas componentes A e B , consideramos as hipersuperfícies Σ_t formadas pelos pontos de A que distam t de Σ , para todo $t > 0$. Afirmamos que $\mathcal{H}^{n-1}(\Sigma_t)$ é estritamente decrescente em t . Esta afirmação é uma consequência imediata da fórmula da segunda variação do volume, a qual pode ser apresentada na seguinte forma.

PROPOSIÇÃO 1.8. *Nas condições da Proposição 1.5, se Σ^k é subvariedade mínima e o campo variacional $X = \partial F / \partial t(\cdot, 0)$ é normal à Σ , então*

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2}{dt^2} \mathcal{H}^k(\Sigma_t) \right|_{t=0} &= \int_{\Sigma} \left(|\nabla^\perp X|^2 - \sum_{i=1}^k R^M(X, e_i, X, e_i) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i,j=1}^k g(B(e_i, e_j), X)^2 \right) d\Sigma + \int_{\partial\Sigma} g(\nabla_X X, \nu) d\sigma. \end{aligned}$$

Na expressão acima, o integrando de Σ é descrito em cada $p \in \Sigma$ via uma base ortonormal $\{e_1, \dots, e_k\} \subset T_p \Sigma$ qualquer. O termo $|\nabla^\perp X|^2$ pode ser escrito em termos de uma base ortonormal como

$$|\nabla^\perp X|^2 = \sum_{i=1}^k g((\nabla_{e_i} X)^N, (\nabla_{e_i} X)^N).$$

Portanto, a segunda variação do volume de dimensão k de Σ^k na direção de um campo normal X é uma expressão bilinear em X . Seja $\delta^2 \Sigma(\cdot, \cdot)$ a forma bilinear simétrica associada àquela expressão.

Na teoria de Morse associada ao funcional de volume de dimensão k , vimos que os pontos críticos associados a subvariedades suaves são subvariedades mínimas. Neste caso, a noção de índice de Morse de pontos críticos é definida da seguinte maneira.

DEFINIÇÃO 1.9. Seja $\Sigma^k \subset M$ uma subvariedade mínima fechada (compacta e sem bordo). O índice de Morse de Σ é definido como o índice da forma bilinear $\delta^2\Sigma(\cdot, \cdot)$; ou seja, o maior inteiro m para o qual existem V_1, \dots, V_m , campos de vetores ao longo de Σ que são linearmente independentes, normais à Σ , e tais que a forma bilinear $\delta^2\Sigma(\cdot, \cdot)$ é negativa definida no espaço gerado por $\{V_1, \dots, V_m\}$.

No caso de hipersuperfícies mínimas fechadas $\Sigma \subset M^n$ que admitem um campo normal unitário global \vec{N} , todo campo variacional normal pode ser escrito na forma $X = f\vec{N}$, onde $f \in C^\infty(\Sigma)$. Neste caso, a fórmula da Proposição 1.8 pode ser reescrita como

$$\left. \frac{d^2}{dt^2} \mathcal{H}^k(\Sigma_t) \right|_{t=0} = - \int_{\Sigma} f \cdot L_{\Sigma} f \, d\Sigma,$$

onde $L_{\Sigma} f = \Delta_{\Sigma} f + (\text{Ric}(\vec{N}, \vec{N}) + |B|^2) f$, para toda $f \in C^\infty(\Sigma)$.

Antes de finalizar a seção, descrevemos uma outra consequência da fórmula da segunda variação do volume em variedades com curvatura de Ricci positiva. Este resultado foi provado por T. Frankel e será usado nos argumentos do Capítulo 4.

TEOREMA 1.10. *Seja M^{n+1} uma variedade Riemanniana completa, conexa e com curvatura de Ricci positiva. Seja Σ_1^n e Σ_2^n hipersuperfícies mínimas fechadas e mergulhadas em M . Então $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \neq \emptyset$.*

PROVA. Suponha, por contradição, que $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$. A completude de M e o fato de que as hipersuperfícies são compactas garante que existe uma geodésica $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ que realiza a distância entre Σ_1 e Σ_2 ; i.e., $\gamma(0) \in \Sigma_1$, $\gamma(1) \in \Sigma_2$ e o comprimento de γ é igual à distância entre as hipersuperfícies em questão. Observamos que γ é ortogonal às hipersuperfícies Σ_i , $i = 1, 2$.

Seja $v \in T_{\gamma(0)}\Sigma_1$ um vetor unitário. Considere o campo X_v que é paralelo ao longo de γ e satisfaz $X_v(0) = v$. Como γ e Σ_1 são ortogonais em $\gamma(0)$, $v \in T_{\gamma(0)}\Sigma_1$ e X_v é paralelo, segue-se que X_v e γ são ortogonais sempre. Em particular, $X_v(1) \in T_{\gamma(1)}\Sigma_2$. Logo, o campo X_v dá origem a uma variação de γ por curvas γ_s^v com extremos nas Σ_i para as quais a segunda variação do comprimento é igual a

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2}{ds^2} L(\gamma_s^v) \right|_{s=0} &= g(B^{\Sigma_2}(X_v(1), X_v(1)), \gamma'(1)) - g(B^{\Sigma_1}(v, v), \gamma'(0)) \\ &\quad - \int_0^1 K(\gamma'(t) \wedge X_v(t)) dt, \end{aligned}$$

onde B^{Σ_i} denota a segunda forma fundamental de $\Sigma_i \subset M$, $i = 1, 2$, e $K(\gamma'(t) \wedge X_v(t))$ denota a curvatura seccional do plano gerado pelos vetores $\gamma'(t)$ e $X_v(t)$, para todo $t \in [0, 1]$.

Finalmente, seja $\{v_1, \dots, v_n\} \subset T_{\gamma(0)}\Sigma_1$ uma base ortonormal. Usando a fórmula da segunda variação para cada v_i , somando em i , e usando a minimalidade, obtemos

$$\sum_{i=1}^n \left. \frac{d^2}{ds^2} L(\gamma_s^{v_i}) \right|_{s=0} = - \int_0^1 \text{Ric}(\gamma'(t), \gamma'(t)) dt.$$

Como γ realiza a distância entre Σ_1 e Σ_2 , as parcelas que aparecem no lado esquerdo da expressão acima são todas não negativas. Por outro lado, $\text{Ric} > 0$ implica que o termo do lado direito é estritamente negativo. Esta contradição implica que $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \neq \emptyset$. \square

2. Varifolds

Nesta seção, introduzimos algumas ideias da teoria de varifolds que serão usadas ao longo do texto, com excessão do Capítulo 2. A principal referência para esta parte são as notas [25]. O objetivo é fazer uma breve introdução sobre varifolds em variedades Riemannianas, os quais são objetos que generalizam a noção de subvariedades, sendo possível falar em dimensão e volume.

A importância da teoria de varifolds nestas notas é que no método min-max, a ser introduzido no Capítulo 3, as subvariedades mínimas são obtidas como um limite no sentido de varifolds.

Um varifold de dimensão k em \mathbb{R}^L é uma medida de Radon (Borel regular e finita em compactos) na Grassmanniana dos k -planos não orientados de \mathbb{R}^L . Usamos $G_k(\mathbb{R}^L)$ para denotar esta Grassmanniana, a qual pode ser interpretada como o produto $G_k(\mathbb{R}^L) = \mathbb{R}^L \times G(L, k)$, onde $G(L, k)$ é a coleção dos k -subespaços de \mathbb{R}^L . A fim de fazer a definição de varifold precisa, passamos a descrever a topologia usada no espaço $G_k(\mathbb{R}^L)$.

A distância entre dois subespaços $S, T \in G(L, k)$ é definida como a norma da transformação linear $(P_S - P_T)$, onde P_S e P_T são as projeções ortogonais de \mathbb{R}^L em S e T , respectivamente. Então, $G_k(\mathbb{R}^L)$ é equipado com a métrica produto. Usamos $C_c(G_k(\mathbb{R}^L))$ para denotar o conjunto das funções contínuas de suporte compacto em $G_k(\mathbb{R}^L)$ a valores reais.

Pelo Teorema de Representação de Riesz, Teorema 4.1 em [25], cada varifold equivale a um funcional linear não negativo em $C_c(G_k(\mathbb{R}^L))$, via integração. Esta ideia pode ser explorada na construção ou representação de varifolds. Por exemplo, podemos usá-la para verificar que estas medidas generalizam a noção de subvariedades de dimensão k . Dada $\Sigma^k \subset \mathbb{R}^L$ e uma função positiva localmente \mathcal{H}^k -integrável θ em Σ^k , associamos o funcional linear que a cada $\phi \in C_c(G_k(\mathbb{R}^L))$ retorna

$$(2) \quad \mathbf{V}(\Sigma, \theta)(\phi) = \int_{\Sigma} \phi(x, T_x \Sigma) \cdot \theta(x) d\mathcal{H}^k(x).$$

Como este funcional é não negativo, $\mathbf{V}(\Sigma, \theta)(\phi) \geq 0$, para toda $\phi \geq 0$, podemos aplicar o Teorema de Representação de Riesz para dizer que $\mathbf{V}(\Sigma, \theta)$ é uma medida de Radon em $G_k(\mathbb{R}^L)$, logo um varifold.

A construção acima também faz sentido se Σ é um subconjunto \mathcal{H}^k -mensurável e k -retificável (a menos de um conjunto de medida \mathcal{H}^k nula é uma união enumerável de imagens $F(\mathbb{R}^k)$ de aplicações Lipschitz $F : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^L$) de \mathbb{R}^L . Ela é possível graças ao fato de que conjuntos k -retificáveis têm espaço tangente \mathcal{H}^k -q.t.p. Os objetos provenientes desta construção são chamados varifolds retificáveis, a função θ é a multiplicidade e Σ o suporte.

Associada a um varifold geral V temos uma medida de Radon em \mathbb{R}^L que generaliza o volume de dimensão k . A massa de V , denotada por $\|V\|$, é definida pela expressão

$$\|V\|(A) = V(\{(x, v) \in G_k(\mathbb{R}^L) : x \in A\}),$$

para todo $A \subset \mathbb{R}^L$ Boreliano de suporte compacto. No caso retificável, $V = \mathbf{V}(\Sigma, \theta)$, a massa $\|V\|(A)$ coincide com a integral de θ sobre $\Sigma \cap A$.

Em geral, o valor $V(\mathcal{A})$ para $\mathcal{A} \subset G_k(\mathbb{R}^L)$ aberto é o supremo dos $\mathbf{V}(\Sigma, \theta)(\phi)$, onde $\phi \in C_c(G_k(\mathbb{R}^L))$, $|\phi| \leq 1$ e é suportada em \mathcal{A} .

O suporte de um varifold V é por definição o suporte da medida $\|V\|$. O espaço dos varifolds é considerado com a topologia fraca usual; convergência como varifold equivale a convergência como medidas, ou seja, $V_i \rightarrow V$ se $V_i(\phi)$ tende a $V(\phi)$ quando $i \rightarrow \infty$, para todo $\phi \in C_c(G_k(\mathbb{R}^L))$.

Uma das grandes vantagens de se trabalhar com varifolds é a compacidade. Como consequência do Teorema de Representação de Riesz e do Teorema de Banach-Alaoglu, temos:

TEOREMA 2.1. *Para todo $c > 0$ finito, o conjunto dos varifolds em \mathbb{R}^L de massa $\|V\|(\mathbb{R}^L) \leq c$ é compacto.*

Além da compacidade, outro fato importante é que, para todo $c > 0$, $\{V : \|V\|(\mathbb{R}^L) \leq c\}$ é metrizável; o que significa que existe uma métrica, a métrica \mathbf{F} , que induz neste espaço a topologia fraca. A métrica \mathbf{F} é pode ser calculada segundo a expressão

$$(3) \quad \mathbf{F}(V, W) = \sup\{V(\phi) - W(\phi) : \phi \in C_c(G_k(\mathbb{R}^L)), |\phi| \leq 1 \text{ e } \text{Lip}(\phi) \leq 1\},$$

para todo par V, W de varifolds de dimensão k em \mathbb{R}^L .

A massa $\|V\|$ é bem comportada em relação a limites na topologia fraca; mais precisamente, se $V_i \rightarrow V$ como varifolds, então

$$(4) \quad \|V\|(G) \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \|V_i\|(G),$$

para todo subconjunto aberto $G \subset \mathbb{R}^L$, e

$$(5) \quad \limsup_{i \rightarrow \infty} \|V_i\|(K) \leq \|V\|(K),$$

para todo $K \subset \mathbb{R}^L$ compacto. Além disso, se $A \subset \mathbb{R}^L$ tem fecho compacto e $\|V\|(\partial A) = 0$, então $\|V_i\|(A)$ tende a $\|V\|(A)$.

Se M^n é uma variedade Riemanniana, consideramos M isometricamente mergulhada em algum espaço Euclidiano \mathbb{R}^L . Então, usamos $\mathcal{V}_k(M)$ para denotar o fecho, na topologia fraca, do espaço dos varifolds retificáveis de dimensão k em \mathbb{R}^L com suporte contido em M . Neste caso, para cada $V \in \mathcal{V}_k(M)$, a massa $\|V\|$ é uma medida de Radon em M .

Em seguida, veremos que parte da discussão sobre a primeira derivada do volume de dimensão k feita na Seção 1 também pode ser aplicada para varifolds gerais. Dados $V \in \mathcal{V}_k(M)$ e uma aplicação $\Psi : M \rightarrow M$ de classe C^1 , denotamos a imagem (o *push-forward*) de V por Ψ por $\Psi_{\#}(V)$. Se $V = \mathbf{V}(\Sigma, \theta)$ é retificável, ela é definida como sendo o varifold retificável de suporte $\Psi(\Sigma)$ e multiplicidade

$$\tilde{\theta}(y) = \sum_{x \in \Psi^{-1}(y) \cap \Sigma} \theta(x).$$

Esta definição pode ser naturalmente estendida para varifolds gerais pela seguinte fórmula: para toda $\phi \in C_c(G_k(\mathbb{R}^L))$,

$$(6) \quad \Psi_{\#}V(\phi) = \int_{G(M)} J\Psi(x, S) \cdot \phi(\Psi(x), d\Psi_x(S)) dV(x, S),$$

onde $J\Psi(x, S)$ denota o elemento de área da diferencial $d\Psi_x$ restrita ao plano S , para cada elemento $(x, S) \in G(M)$ da Grassmanniana dos 2-planos não-orientados em M .

Sejam X um campo de vetores em M e $\{\Psi_t\}_t$ o fluxo de X ; ou seja, Ψ_t é difeomorfismo de M para todo t , $\Psi_0(x) = x$ e $\frac{d}{dt}\Psi_t(x) = X(\Psi_t(x))$, para todo $x \in M$. Consideramos a massa total da imagem de V por cada Ψ_t , derivamos e avaliamos o resultado em $t = 0$:

$$(7) \quad \delta V(X) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \|\Psi_t_{\#}(V)\|(M).$$

Esta é a primeira variação de V na direção do campo X .

A primeira variação $\delta V(X)$ é contínua com respeito a topologia produto de $\mathcal{V}_k(M) \times \mathfrak{X}(M)$, onde o espaço dos campos de vetores em M , denotado por $\mathfrak{X}(M)$, é considerado com a topologia C^1 .

De modo análogo à Proposição 1.2, temos:

PROPOSIÇÃO 2.2. *Sejam V um varifold de dimensão k e X um campo de vetores em M . A primeira variação tem a seguinte fórmula integral:*

$$(8) \quad \delta V(X) = \int \operatorname{div}_S X(x) dV(x, S).$$

DEFINIÇÃO 2.3. Um varifold V é dito *estacionário* em M se $\delta V(X) = 0$ para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Para finalizar a seção, apresentamos na proposição seguinte um exemplo natural de sequência convergente de varifolds.

PROPOSIÇÃO 2.4. *Sejam M^n uma variedade Riemanniana compacta, V um varifold de dimensão k em M e φ um difeomorfismo de M . Se $\{\varphi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de difeomorfismos de M que converge na topologia C^1 para φ , então, $(\varphi_i)_\# V \rightarrow \varphi_\# V$ como varifold.*

Além disso, temos $\lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{F}((\varphi_i)_\# V, \varphi_\# V) = 0$.

PROVA. Por definição, para cada $\xi \in C_c(G_k(\mathbb{R}^L))$, temos

$$(\varphi_i)_\# V(\xi) = \int_{G(M)} J\varphi_i(x, S) \cdot \xi(\varphi_i(x), d(\varphi_i)_x(S)) dV(x, S).$$

Pelos fatos de que $\varphi_i \rightarrow \varphi$ na topologia C^1 e ξ tem suporte compacto, concluímos que o integrando da expressão acima converge uniformemente para $J\varphi(x, S) \cdot \xi(\varphi(x), d\varphi_x(S))$. Portanto, como V tem massa total finita, podemos concluir que $(\varphi_i)_\# V(\xi) \rightarrow \varphi_\# V(\xi)$, para toda ξ . Donde concluímos a primeira afirmação.

Para verificar a segunda parte, usamos que M está isometricamente mergulhada em algum \mathbb{R}^L e escolhemos um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^L$ aberto de fecho compacto tal que $M \subset A$. Isto implica que $\|\varphi_\# V\|(\partial A) = 0$, e podemos aplicar uma das relações apresentadas sobre massa e convergência no sentido de varifolds para concluir que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|(\varphi_i)_\# V\|(M) = \lim_{i \rightarrow \infty} \|(\varphi_i)_\# V\|(A) = \|\varphi_\# V\|(A) = \|\varphi_\# V\|(M).$$

Em particular, existe $c > 0$ tal que todos os varifolds mencionados acima têm massa total menor ou igual a c . Neste caso, sabemos que convergência como varifold implica convergência na métrica \mathbf{F} . \square

Observe que o argumento utilizado nesta prova também mostra que se $V_i \rightarrow V$ como varifolds em uma variedade Riemanniana compacta, então a massa total de V , $\|V\|(M)$, coincide com o limite das massas $\|V_i\|(M)$.

CAPÍTULO 2

Existência de geodésicas fechadas

Neste capítulo, provamos que toda superfície fechada admite uma geodésica fechada. Este fato foi observado por Cartan para superfícies de gênero $g \neq 0$. Neste caso é possível produzir geodésicas fechadas que são pontos críticos de tipo mínimo local. Isto pode não ser possível em superfícies de gênero $g = 0$. De fato, não existem geodésicas minimizantes locais em métricas de curvatura seccional positiva em S^2 . Em 1917, Birkhoff provou que toda esfera Riemanniana possui pelo menos uma geodésica fechada. A prova apresentada nestas notas segue de perto as ideias originais de Birkhoff.

O presente capítulo é dividido em duas seções. Na primeira, discutimos a existência de geodésicas minimizantes em superfícies de gênero $g \neq 0$, e na segunda analisamos o caso $g = 0$.

1. Geodésicas minimizantes

Geodésicas são pontos críticos do funcional comprimento. Logo, uma maneira natural de obter tais objetos é minimizando este funcional em uma classe de curvas com a propriedade de que se uma curva γ pertence a classe, então pequenas variações de γ também pertencem. Deste modo, se houver curva minimizante de comprimento na classe, ela será ponto crítico de tipo mínimo local. Em particular, será uma geodésica.

Uma possibilidade é minimizar o comprimento em uma classe de homotopia livre que seja não trivial. Mais precisamente, sejam M^2 uma superfície fechada e orientável, de gênero $g \neq 0$ e munida de uma métrica Riemanniana e $\gamma : S^1 \rightarrow M^2$ uma curva diferenciável por partes. Considere a classe das curvas diferenciáveis por partes $c : S^1 \rightarrow M^2$ que são homotópicas a γ ; ou seja, existe aplicação contínua $H : S^1 \times [0, 1] \rightarrow M^2$, tal que cada $H(\cdot, u)$ é curva fechada e com $H(\cdot, 0) = \gamma$ e $H(\cdot, 1) = c$.

Usamos $[\gamma]$ para denotar a classe de homotopia de γ , e dizemos que $[\gamma]$ é trivial se γ é homotópica a uma curva constante em M . Caso contrário, escrevemos $[\gamma] \neq 0$ e dizemos que a classe é não trivial. É claro que pequenas variações de uma curva são homotópicas a curva original.

Seja L o funcional que associa a cada curva diferenciável por partes o seu comprimento com respeito a métrica de M ; a integral do comprimento do vetor velocidade em uma parametrização qualquer. A fim de obter uma geodésica minimizante em $[\gamma] \neq 0$, é necessário verificar que o ínfimo dos comprimentos de curvas nessa classe é um número estritamente positivo. Este é o conteúdo da seguinte proposição:

PROPOSIÇÃO 1.1. *Se $[\gamma] \neq 0$, então $\inf_{c \in [\gamma]} L(c) > 0$.*

PROVA. Suponha, por contradição, que existe uma sequência $\{\gamma_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset [\gamma]$, tal que $L(\gamma_i)$ tende a 0. Tome $p_i \in \gamma_i$, e suponha, a menos de passagem a uma subsequência, que $p_i \rightarrow p$, $p \in M$. Tome $r > 0$ de modo que a bola $B_r(p)$ centrada em p de raio r é difeomorfa a um disco. Se $i_0 \in \mathbb{N}$ é grande o suficiente, então $L(c_i) \leq r/2$ e $\text{dist}(p, p_i) \leq r/4$, para todo $i \geq i_0$. Portanto, $c_i \subset B_r(p)$, para todo $i \geq i_0$. Isto contradiz o fato de que c_i é não trivial. \square

A fim de mostrar que existe curva minimizante em $[\gamma]$, considere uma sequência minimizante $\{\gamma_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset [\gamma]$; ou seja, cada γ_i é homotópica a γ e

$$L(\gamma_i) \longrightarrow \inf_{c \in [\gamma]} L(c) =: L([\gamma]).$$

Em seguida, mostraremos como construir uma curva c a partir de $\{\gamma_i\}_i$ satisfazendo:

$$(9) \quad c \in [\gamma] \text{ e } L(c) = L([\gamma]).$$

E, portanto, $L(c) = L([\gamma])$ e c é uma geodésica fechada.

TEOREMA 1.2. *Seja M^2 superfície fechada, orientável e de gênero $g \neq 0$. Dada $[\gamma] \neq 0$, existe geodésica fechada $c \in [\gamma]$.*

PROVA. Fixe $r(M) > 0$ tal que: para todo $p \in M$,

- (a) $B_{r(M)}(p)$ é disco em M
- (b) dados $q_1, q_2 \in B_{r(M)}(p)$, existe um único segmento geodésico minimizante ligando q_1 a q_2 , e este segmento está contido em $B_{r(M)}(p)$. Usamos $[q_1, q_2]$ para denotar esta curva.

Seja $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $L(\gamma_i) \leq 2L([\gamma])$, para todo $i \geq i_0$. Considere $N \in \mathbb{N}$ de modo que

$$\frac{2L([\gamma])}{N} < \frac{r(M)}{2}.$$

Para cada $i \in \mathbb{N}$, escolha $\theta_1^i, \dots, \theta_{N+1}^i \in S^1$, com $\theta_{N+1}^i = \theta_1^i$, tais que o comprimento de γ_i restrita a cada subintervalo $[\theta_j^i, \theta_{j+1}^i]$ é o mesmo:

$$L(\gamma_i|_{\theta_j^i, \theta_{j+1}^i}) = \frac{L(\gamma_i)}{N}.$$

Seja $p_j^i = \gamma_i(\theta_j^i) \in M$. Sendo assim, para cada $i \geq i_0$, temos

$$(10) \quad \text{dist}(p_j^i, p_{j+1}^i) < \frac{r(M)}{2}.$$

A menos de passagem a uma subsequência, suponha que $p_j^i \rightarrow p_j$, para todo $j = 1, \dots, N+1$. Pela relação anterior, segue-se que $\text{dist}(p_j, p_{j+1}) < r(M)$ e $p_{N+1} = p_1$. Considere a curva c composta pela união dos segmentos geodésicos $[p_j, p_{j+1}]$, $j = 1, \dots, N$. Para concluir a prova, é suficiente verificar que c satisfaz as propriedades desejadas, como enunciado em (9).

Para $i \in \mathbb{N}$ grande, temos: $\text{dist}(p_j^i, p_j) < r(M)/4$, $L(\gamma_i|_{\theta_j^i, \theta_{j+1}^i}) < r(M)/2$ e, como consequência de (10), $p_{j+1} \in B_{r(M)}(p_j)$, para todo $1 \leq$

$j \leq N$. Logo, a curva obtida pela concatenação do segmento geodésico $[p_j, p_j^i]$ com a retrição de γ_i ao intervalo $[\theta_j^i, \theta_{j+1}^i]$ e seguida de $[p_{j+1}^i, p_j]$, nessa ordem, está contida em $B_{r(M)}(p_j)$. Em particular, pela propriedade (a) de $r(M)$, $[p_j, p_{j+1}]$ e $[p_j, p_j^i](\gamma_i|_{\theta_j^i, \theta_{j+1}^i})[p_{j+1}^i, p_j]$ são homotópicas com extremos fixos. Juntando todas as homotopias, concluímos que c é homotópica a γ_i ; ou seja, $c \in [\gamma]$. Finalmente, observe que

$$L(c) = \sum_{j=1}^N \text{dist}(p_j, p_{j+1}) \leq \sum_{j=1}^N \left(\lim_{i \rightarrow \infty} L(\gamma_i|_{\theta_j^i, \theta_{j+1}^i}) \right) = \lim_{i \rightarrow \infty} L(\gamma_i) = L(\gamma).$$

Como $c \in [\gamma]$, segue-se que $L(c)$ coincide com o ínfimo $L([\gamma])$. \square

Segue do argumento dado na prova do Teorema 1.2 que a igualdade $L(c) = L([\gamma])$ implica que a diferença $L(\gamma_i|_{\theta_j^i, \theta_{j+1}^i}) - \text{dist}(\gamma_i(\theta_j^i), \gamma_i(\theta_{j+1}^i))$ tende a zero quando $i \rightarrow \infty$, para todo $j = 1, \dots, N$.

2. Geodésicas min-max

O resultado apresentado na seção anterior também é verdadeiro para uma métrica Riemanniana qualquer na esfera S^2 . No entanto, a técnica utilizada naquele caso não pode ser aplicada, dado que toda curva fechada em S^2 é homotopicamente trivial. Além disso, existem muitas métricas Riemannianas na esfera para as quais nenhuma geodésica fechada é minimizante local de comprimento. Qualquer métrica de curvatura Gaussiana positiva tem essa propriedade por exemplo. Portanto, o argumento no caso de S^2 deve ser substancialmente diferente.

TEOREMA 2.1. *Toda métrica em S^2 admite geodésica fechada.*

Este Teorema foi provado por Birkhoff em 1917 em resposta a uma pergunta feita por Poincaré. Em vez de minimizar o comprimento L em uma classe de curvas, a ideia é considerar uma classe de homotopia de famílias de curvas e minimizar o funcional que associa a cada família o comprimento de sua curva mais longa. A geodésica será obtida como uma curva maximal de uma família de curvas minimizante, logo, uma geodésica min-max.

A prova do Teorema 2.1 seguirá os seguintes passos: introduziremos a classe de famílias de curvas que será usada; em seguida, em analogia à Proposição 1.1, mostraremos que esta classe não é trivial. A ideia principal do argumento, é um processo introduzido por Birkhoff que transforma cada elemento da classe em uma família em que cada curva fechada é geodésica por partes. Finalmente, usaremos essas famílias especiais para produzir a geodésica fechada.

2.1. Os *sweepouts* e a *width*. Nessa seção, introduziremos a classe de *sweepouts*, famílias de curvas em S^2 , a ser usada e veremos que a *width*, o invariante min-max básico, associada a esta classe é não nula.

Seja $f_0 : S_0^2 \rightarrow S^2$ uma aplicação diferenciável da esfera Euclideana $S_0^2 = \{x : |x| = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ em uma esfera Riemanniana fixa que não seja homotopicamente trivial. Uma aplicação f_0 de grau 1, por exemplo.

Em $S_0^2 \subset \mathbb{R}^3$, considere a família de curvas $\bar{c}_t = \{x \in S_0^2 : x_3 = 2t - 1\}$, $0 \leq t \leq 1$, onde x_1, x_2, x_3 representam as coordenadas retangulares. Observe que as curvas \bar{c}_t varrem toda a esfera; começam por $\bar{c}_0 = (0, 0, -1)$ e terminam em $\bar{c}_1 = (0, 0, 1)$. Além disso, cada \bar{c}_t é uma circunferência de comprimento menor ou igual a $2\pi = L(\bar{c}_{1/2})$. Ao longo desta seção, usaremos a seguinte parametrização de \bar{c}_t :

$$(11) \quad \bar{c}_t(\theta) = (\sqrt{1 - (2t - 1)^2} \cos \theta, \sqrt{1 - (2t - 1)^2} \sin \theta, 2t - 1),$$

para todo $\theta \in [0, 2\pi]$, o qual pode ser pensado como pertencendo a S^1 , desde que vale a igualdade $\bar{c}_t(0) = \bar{c}_t(2\pi)$.

Fixe $E_0 > 0$ grande. Seja Π a classe das aplicações contínuas $f : S_0^2 \rightarrow S^2$ que satisfazem as seguintes propriedades:

- (i) a restrição de f a cada \bar{c}_t é diferenciável por partes,
- (ii) a energia de cada aplicação $f \circ \bar{c}_t$, definida por

$$E(f \circ \bar{c}_t) = \int_0^{2\pi} |(f \circ \bar{c}_t)'(\theta)|^2 d\theta,$$

satisfaz $E(f \circ \bar{c}_t) \leq E_0$, e

- (iii) f é homotópica a f_0 ; ou seja, existe homotopia $H : S_0^2 \times [0, 1] \rightarrow S^2$ tal que $H(\cdot, 0) = f_0$, $H(\cdot, 1) = f$ e cada $H(\cdot, s) \circ \bar{c}_t$ é diferenciável por partes e tem energia menor ou igual a E_0 .

Baseados nos fatos de que as curvas \bar{c}_t varrem S_0^2 e f ser homotópica a uma aplicação não trivial, associamos, a cada $f \in \Pi$, uma família de curvas que varre S^2 conforme a seguinte definição:

DEFINIÇÃO 2.2. Uma família $\{c_t\}_t$, de curvas de S^2 , é dita um *sweepout* se houver $f \in \Pi$ tal que $c_t = f(\bar{c}_t)$, para todo $0 \leq t \leq 1$.

Se E_0 é suficientemente grande, então $f_0 \in \Pi$ e, portanto, $\Pi \neq \emptyset$. A cada *sweepout* associamos o supremo dos comprimentos de suas curvas, em seguida consideramos o ínfimo destes valores na classe. O número assim obtido é o invariante min-max básico:

DEFINIÇÃO 2.3. Seja Π a classe de *sweepouts* em S^2 associada à aplicação $f_0 : S_0^2 \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow S^2$ e a $E_0 > 0$. A *width* de Π é o número definido por

$$W(\Pi) = \inf_{f \in \Pi} \sup_{t \in [0, 1]} L(f(\bar{c}_t)).$$

Mostraremos adiante que a esfera Riemanniana S^2 admite uma geodésica fechada de comprimento $W(\Pi)$. A fim de verificar que esta curva não se degenera a um ponto, mostraremos a seguir que a *width* de Π é estritamente positiva. Antes disso, observe que a expressão que define o invariante min-max é apresentada em termos de ínfimos e supremos, em vez de mínimos e

máximos. Isto ilustra, em particular, a possibilidade de que pode não existir um *sweepout* ótimo realizando a *width*.

PROPOSIÇÃO 2.4. $W(\Pi) > 0$.

Observe que se houvesse um *sweepout* ótimo $\{f(\bar{c}_t)\}_t$ e a *width* fosse igual a zero, então a imagem de todas as curvas \bar{c}_t seriam pontos em S^2 . Neste caso, a imagem de f seria uma curva em S^2 , e, portanto, f seria homotópica à aplicação constante, contradizendo a escolha de f_0 . No argumento formal apresentado abaixo, usaremos uma sequência minimizante de *sweepouts* em vez supor a existência de um *sweepout* ótimo.

PROVA. Seja $f_i : S_0^2 \rightarrow S^2$ uma sequência minimizante em Π . Suponha, por contradição que $W(\Pi) = 0$. Sendo assim, para i grande, todo $L(f_i(\bar{c}_t))$ é arbitrariamente pequeno. Com isto, dado $\varepsilon > 0$, a continuidade de f_i pode ser usada para encontrar $p_1, \dots, p_R \in S^2$ e cobrir $[0, 1]$ por intervalos abertos I_1, \dots, I_R tais que $f_i(\bar{c}_t) \subset B_\varepsilon(p_j)$, para todo $t \in I_j$. Suponha, sem perda de generalidade, que $I_j \cap I_k \neq \emptyset$ se, e somente se, $|j - k| \leq 1$.

Afirmo que se $\varepsilon > 0$ é suficientemente pequeno, então $f_i \circ \bar{c}_t$ pode ser homotopicamente deformada à curva constante $f_i(\bar{c}_t(0))$, ao longo de um caminho de curvas fechadas, diferenciáveis por partes e de energia menor ou igual a E_0 . Para tanto, escolha ε de modo que toda bola $B_\varepsilon(p_j)$ é um disco, e dados $q_1, q_2 \in B_r(p_j)$ existe uma única geodésica minimizante $[q_1, q_2]$ ligando os pontos q_1 e q_2 e ela está totalmente contida em $B_r(p_j)$.

Para cada $s, t \in [0, 1]$, usamos $[f_i(\bar{c}_t(0)), f_i(\bar{c}_t(2\pi s))]$ para denotar a geodésica minimizante ligando esses dois pontos de $f_i \circ \bar{c}_t$, e suponha que ela está parametrizada proporcionalmente ao comprimento de arco (velocidade constante) no intervalo $[0, 2\pi s]$. Defina $H_i : S_0^2 \times [0, 1] \rightarrow S^2$ por

$$H_i(\bar{c}_t(\theta), s) = [f_i(\bar{c}_t(0)), f_i(\bar{c}_t(2\pi s))](\theta),$$

para todo $\theta \in [0, 2\pi s]$, e

$$H_i(\bar{c}_t(\theta), s) = f_i(\bar{c}_t(\theta)),$$

para $\theta \in [2\pi s, 2\pi]$. Esta aplicação é contínua. Além disso, cada $H_i(\cdot, s) \circ \bar{c}_t$ é diferenciável por partes, pois é composta de um segmento geodésico e de uma porção de $f_i \circ \bar{c}_t$. Observe também que

$$E(H_i(\cdot, s) \circ \bar{c}_t) = E([f_i(\bar{c}_t(0)), f_i(\bar{c}_t(2\pi s))]) + \int_{2\pi s}^{2\pi} |(f_i \circ \bar{c}_t)'(\theta)|^2 d\theta,$$

onde

$$(12) \quad E([f_i(\bar{c}_t(0)), f_i(\bar{c}_t(2\pi s))]) = \frac{1}{2\pi s} \text{dist}(f_i(\bar{c}_t(0)), f_i(\bar{c}_t(2\pi s)))^2.$$

Por outro lado, como este segmento geodésico é minimizante, temos que

$$(13) \quad L(f_i([\bar{c}_t(0)], f_i(\bar{c}_t(2\pi s))))^2 \leq \left(\int_0^{2\pi s} |(f_i \circ \bar{c}_t)'(\theta)| d\theta \right)^2 \\ \leq (2\pi s) \int_0^{2\pi s} |(f_i \circ \bar{c}_t)'(\theta)|^2 d\theta.$$

A última desigualdade é uma aplicação de Cauchy-Schwartz. Donde concluímos, para todo $s \in [0, 1]$, que $E(H_i(\cdot, s) \circ \bar{c}_t) \leq E(f_i \circ \bar{c}_t) \leq E_0$.

Finalmente, observe que $H_i(\bar{c}_t(\cdot), 1)$ é a curva constante $f_i(\bar{c}_t(0))$. Isto segue do fato de que $f_i(\bar{c}_t(0)) = f_i(\bar{c}_t(2\pi))$ e contradiz a condição de não trivialidade dos *sweepouts*. □

2.2. Processo de encurtamento de curvas. O principal ingrediente do argumento de Birkhoff será apresentado nesta seção; consiste em um processo que substitui cada curva de um *sweepout* por uma curva fechada de comprimento estritamente menor que a original, a menos que aquela já fosse geodésica. A notação da seção anterior será usada repetidamente.

Como veremos adiante, o processo depende sutilmente do *sweepout*. Mais precisamente, usaremos que se a curva fechada c provém de um *sweepout*, então ela tem uma parametrização canônica $c : [0, 2\pi] \rightarrow S^2$ obtida a partir de alguma das curvas do *sweepout* $\{\bar{c}_t\}_t$ da esfera Euclideana $S_0^2 \subset \mathbb{R}^3$, como definido na Seção 2.1. Este fato é utilizado para justificar que o processo de Birkhoff é bem definido e depende continuamente da curva.

Apesar da dependência em relação ao *sweepout*, a construção também faz sentido para uma única curva fechada parametrizada; a partir de uma seleção de pontos da curva c , construímos uma curva \tilde{c} formada por segmentos geodésicos com extremos nos pontos escolhidos. Em seguida, repetimos este processo para \tilde{c} , escolhendo os pontos médios dos segmentos que compõem \tilde{c} para formar a curva geodésica por partes $D(c)$. A segunda aproximação geodésica é a curva usada no processo de Birkhoff. A seguir, descreveremos essa construção em detalhes, incluindo a dependência do *sweepout*.

Fixe $r > 0$ de modo que toda bola métrica $B_r(p)$, $p \in S^2$, é um disco, e dados $q_1, q_2 \in B_r(p)$ existe uma única geodésica minimizante $[q_1, q_2]$ ligando os pontos q_1 e q_2 e ela está totalmente contida em $B_r(p)$.

Observe que existe $N \in \mathbb{N}$ com a propriedade de que se $c : [0, 2\pi] \rightarrow S^2$ é uma curva fechada diferenciável por partes com $E(c) \leq E_0$, então

$$(14) \quad \text{dist}(c(2\pi j/N), c(2\pi(j+1)/N)) < r,$$

para todo $j = 0, 1, \dots, N-1$. De fato, temos

$$\text{dist}(c(2\pi j/N), c(2\pi(j+1)/N)) \leq \int_{2\pi j/N}^{2\pi(j+1)/N} |c'(\theta)| d\theta \\ \leq \sqrt{\int_{2\pi j/N}^{2\pi(j+1)/N} |c'(\theta)|^2 d\theta} \cdot \sqrt{\frac{2\pi}{N}}.$$

Sendo assim, é suficiente escolher N de modo que $2\pi E_0 < r^2 N$.

DEFINIÇÃO 2.5. Seja $\{c_t\}_t$ o *sweepout* de S^2 associado a $f \in \Pi$ via $c_t = f \circ \bar{c}_t$. Considere $N \in \mathbb{N}$ satisfazendo (14). Para todo $t \in [0, 1]$ e $0 \leq j \leq N - 1$, defina

$$m_j(t) \in [c_t(2\pi j/N), c_t(2\pi(j+1)/N)],$$

como sendo o ponto médio do único segmento geodésico minimizante que liga os pontos $c_t(2\pi j/N)$ e $c_t(2\pi(j+1)/N)$. Observe que cada $m_j(t)$ depende continuamente de t .

Finalmente, pada cada $0 \leq t \leq 1$, definimos $D(c_t)$ como sendo a curva fechada composta pelos segmentos geodésicos $[m_j(t), m_{j+1}(t)]$, a qual pode ser parametrizada por:

$$D(c_t)(\theta) = \exp_{m_j(t)} \left(\frac{N\theta - 2\pi j}{2\pi} \exp_{m_j(t)}^{-1}(m_{j+1}(t)) \right),$$

em cada subintervalo $\theta \in [2\pi j/N, 2\pi(j+1)/N]$.

PROPOSIÇÃO 2.6. *A família de curvas $D(c_t)$ definida acima é um sweepout de Π . Além disso, $L(D(c_t)) \leq L(c_t)$, para todo $0 \leq t \leq 1$, com igualdade se, e somente se, c_t for uma geodésica fechada de S^2 ou uma curva constante.*

PROVA. A fim de mostrar que $\{D(c_t)\}_t$ é um *sweepout*, defina a aplicação $D(f) : S_0^2 \rightarrow S^2$ por $D(f)(\bar{c}_t(\theta)) = D(c_t)(\theta)$. Para cada $t \in [0, 1]$, a curva $D(c_t)$ é geodésica por partes. Em particular, também é diferenciável por partes. A continuidade de $D(f)$ segue imediatamente da continuidade das aplicações $m_j(t)$.

Em seguida, construímos uma homotopia $H : S_0^2 \times [0, 2] \rightarrow S^2$ entre $f = H(\cdot, 0)$ e $D(f) = H(\cdot, 2)$, tal que $H(\cdot, s) \circ \bar{c}_t$ é diferenciável por partes e $E(H(\cdot, s) \circ \bar{c}_t) \leq E_0$, para todos $t \in [0, 1]$ e $s \in [0, 2]$. Isto implicará que $D(f) \in \Pi$. A construção é similar àquela feita na prova da Proposição 2.4.

Começamos definindo a homotopia para $s \in [0, 1]$, como uma homotopia entre as $f(\bar{c}_t)$ e a primeira aproximação geodésica. A curva $H(\bar{c}_t(\cdot), s)$ é definida em cada intervalo $[2\pi j/N, 2\pi(j+1)/N]$ como sendo a concatenação do segmento geodésico de extremos $f(\bar{c}_t(2\pi j/N))$ e $f(\bar{c}_t(2\pi(j+s)/N))$, com a restrição da curva $f \circ \bar{c}_t$ ao subintervalo $[2\pi(j+s)/N, 2\pi(j+1)/N]$. Mais precisamente, para todo $\theta \in [2\pi j/N, 2\pi(j+s)/N]$, definimos

$$H(\bar{c}_t(\theta), s) = [f(\bar{c}_t(2\pi j/N)), f(\bar{c}_t(2\pi(j+s)/N))](\theta),$$

e, para $\theta \in [2\pi(j+s)/N, 2\pi(j+1)/N]$,

$$H(\bar{c}_t(\theta), s) = f(\bar{c}_t(\theta)).$$

Cada segmento geodésico acima é minimizante e parametrizado proporcionalmente ao comprimento de arco, logo eles também minimizam energia. Em particular, $E(H(\bar{c}_t(\cdot), s)) \leq E(f \circ \bar{c}_t) \leq E_0$, para todo $s \in [0, 1]$.

De modo análogo, definimos a segunda parte da homotopia $H(\cdot, s)$, $s \in [1, 2]$, entre a primeira e a segunda aproximação geodésica. O que prova que H satisfaz a propriedade (iii) da definição de Π .

Pela construção, é imediato verificar a desigualdade $L(D(c_t)) \leq L(c_t)$. Como r foi escolhido de modo que geodésicas minimizantes em bolas de raio r são únicas, se houver igualdade nessa relação, então $D(c_t)$ e a geodésica por partes construída a partir dos $c_t(2\pi j/N)$ devem coincidir com c_t . Em particular, c_t deve ser geodésica por partes e os conjuntos singulares das duas geodésicas por partes acima devem ser iguais. Os vértices de $D(c_t)$ são os pontos médios entre vértices consecutivos da segunda curva, logo as únicas possibilidades são: c_t é geodésica fechada ou uma curva constante. \square

2.3. Existência de geodésicas min-max. Nesta seção, provaremos o Teorema 2.1.

PROVA. Pela Proposição 2.4, sabemos que $W(\Pi) > 0$. Seja $\{f_n\}_n \in \Pi$ uma sequência minimizante; ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \{L(f_n(\bar{c}_t)) : t \in [0, 1]\} = W(\Pi).$$

Como o processo de Birkhoff nunca aumenta comprimentos, Proposição 2.6, temos que $\{D(f_n)\}_n$ e $\{D^2(f_n)\}_n$ também são sequências minimizantes em Π . Escolha $\{t_n\}_n \subset [0, 1]$, tal que

$$(15) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} L(D^2(f_n \circ \bar{c}_{t_n})) = W(\Pi).$$

Seja $c_n = f_n \circ \bar{c}_{t_n}$. A menos de subsequência, podemos supor que a sequência de geodésicas por partes $D(c_n)$ tem um limite $c : [0, 2\pi] \rightarrow S^2$, o qual também é uma geodésica por partes que é parametrizada com velocidade constante em cada segmento componente. De fato, por construção, cada curva c_n tem N quebras, onde $N \in \mathbb{N}$ é uniforme. Se estes conjuntos de N pontos convergem na topologia de Hausdorff, então as geodésicas por partes associadas convergem na topologia C^0 como aplicações de $[0, 2\pi]$ em S^2 .

Em cada intervalo $[2\pi j/N, 2\pi(j+1)/N]$, as curvas em questão são geodésicas minimizantes parametrizadas proporcionalmente ao comprimento de arco. Logo, $E(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} E(c_n) \leq E_0$. Vimos que a aplicação de Birkhoff é definida para toda curva parametrizada, fechada, diferenciável por partes e com energia menor ou igual a E_0 . Em outras palavras, a curva não precisa estar em um *sweepout* e o resultado final da Proposição 2.6 também pode ser aplicado neste caso. Sendo assim, faz sentido dizer que $D^2(c_n)$ converge a $D(c)$. Além disso, $L(D^2(c_n)) \leq L(D(c_n))$, a escolha (15) e o fato de que $D(f_n)$ é minimizante implicam que

$$L(D(c)) = L(c) = W(\Pi).$$

Pela Proposição 2.6, a primeira igualdade acima nos diz que se c não é uma curva constante, então ela é uma geodésica fechada. Como o comprimento de c é igual a *width* de Π e $W(\Pi) > 0$, pela Proposição 2.4, concluímos que c é uma geodésica fechada. \square

CAPÍTULO 3

Teoria min-max

No capítulo anterior, apresentamos o argumento de Birkhoff para a prova do fato de que toda métrica em uma esfera Riemanniana bidimensional admite ao menos uma geodésica fechada. Para tanto, consideramos caminhos não triviais no espaço de curvas parametrizadas fechadas na superfície dada e aplicamos um argumento min-max.

Neste capítulo, introduziremos a teoria min-max correspondente em espaços de dimensão maior que 2 e apresentaremos os argumentos de algumas partes do Teorema min-max correspondente. A primeira versão desta teoria variacional foi iniciada por Almgren em meados dos anos 1960 e aperfeiçoada por Pitts. Eles foram capazes de mostrar que toda variedade Riemanniana M^n fechada de dimensão $n \in \{3, 4, 5, 6\}$ admite ao menos uma hipersuperfície mínima, suave, fechada e mergulhada.

O desenvolvimento da teoria divide-se em duas partes. A primeira parte consiste na prova da existência de uma hipersuperfície mínima fechada, não necessariamente suave, que tem certas propriedades variacionais interessantes. A segunda parte, a teoria de regularidade, aplica estimativas de curvatura para hipersuperfícies mínimas estáveis e garante a suavidade do objeto produzido na primeira parte. Neste capítulo, discutimos em detalhes as ideias envolvidas na primeira parte do argumento; a parte variacional. Na última seção, apresentamos alguns ingredientes da parte de regularidade.

A versão original de Almgren e Pitts usa objetos e técnicas de teoria geométrica da medida já na formulação da teoria. A fim de apresentar o método de uma maneira mais direta e intuitiva, vamos utilizar a variante da teoria min-max desenvolvida por Simon e Smith [26], e revisitada por Colding e De Lellis [4]; nessa abordagem, M é tridimensional. A apresentação dessa teoria é o conteúdo da Seção 1. Em paralelo a teoria min-max em variedades fechadas, apresentamos uma variante deste método que é adequada para variedades com bordo.

Na Seção 2, desenvolvemos a deformação *pull-tight*, que funciona como o processo de encurtamento de curvas de Birkhoff. Na Seção 3, apresentaremos o argumento combinatório, o qual mostra a existência de um objeto ideal para a aplicação da teoria de regularidade. Na Seção 4, apresentamos alguns passos da prova da regularidade.

1. Teoria min-max suave

Seja (M^3, g) uma variedade Riemanniana compacta e orientável, possivelmente com bordo. Usamos \mathcal{H}^2 para denotar a medida de Hausdorff bidimensional em M ; para superfícies $\Sigma^2 \subset M$, o número $\mathcal{H}^2(\Sigma)$ coincide com a área de Σ . Seja $I = [-1, 1]$ o intervalo fechado da reta real contendo os números $-1 \leq t \leq 1$.

A primeira ideia a ser introduzida na descrição da teoria min-max é a de famílias a um parâmetro $\{\Sigma_t\}_{t \in I}$ de subconjuntos fechados de M com medida \mathcal{H}^2 finita tal que

- (c1) $\mathcal{H}^2(\Sigma_t)$ é contínua em $t \in I$, e
- (c2) Σ_t converge a Σ_{t_0} como subconjunto de M , quando $t \rightarrow t_0$.

Em (c2), convergência como conjunto significa na topologia Hausdorff; dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $|t - t_0| < \delta$, então Σ_t está contido no conjunto dos pontos cuja distância a Σ_{t_0} é no máximo ε , e vice-versa.

DEFINIÇÃO 1.1. Dizemos que uma família de subconjuntos fechados $\{\Sigma_t\}_{t \in I}$ satisfazendo (c1) e (c2) é um *sweepout* se existem subconjuntos finitos $T \subset I$ e $P \subset M$ tais que

- (a) se $t \notin T$, então Σ_t é uma superfície fechada,
- (b) se $t \in T$, então ou $\Sigma_t \setminus P$ é uma superfície ou $\mathcal{H}^2(\Sigma_t) = 0$,
- (c) Σ_t varia suavemente como gráfico em $t \in I \setminus T$, e
- (d) se $t_0 \in T$ e $\mathcal{H}^2(\Sigma_{t_0}) \neq 0$, então Σ_t converge suavemente como gráfico a Σ_{t_0} em $M \setminus P$, quando $t \rightarrow t_0$.

Para variedades com bordo $\partial M \neq \emptyset$, adicionamos a hipótese que ∂M é conexo. Além disso, exigimos que *sweepouts* $\{\Sigma_t\}$ satisfaçam as seguintes condições extras:

- (e) Σ_{-1} coincide com ∂M ,
- (f) Σ_t está contido no interior de M , para todo $-1 < t \leq 1$, e
- (g) $\{\Sigma_t\}$ folheia uma vizinhança de ∂M .

A condição (g) acima significa que para cada *sweepout* existem $\alpha > 0$ e uma função diferenciável $w : [0, \alpha] \times \partial M \rightarrow \mathbb{R}$ com $w(0, x) = 0$ e $\frac{\partial w}{\partial t}(0, x) > 0$, para todo $x \in \partial M$, tais que, para todo $t \in [0, \alpha]$,

$$\Sigma_t = \{\exp_x(-w(t, x)\nu(x)) : x \in \partial M\},$$

onde \exp_x denota a aplicação exponencial de M em x e $\nu(x)$ o vetor unitário conormal ao bordo e apontando para fora de M .

Em seguida, apresentamos alguns exemplos de *sweepouts*.

EXEMPLO 1.2. Na esfera Euclideana $S^3 = \{x \in \mathbb{R}^4 : |x| = 1\}$, podemos construir um *sweepout* para o qual as fatias Σ_t são os níveis de alguma coordenada. Basta considerar

$$\Sigma_t = \{x \in S^3 : x_4 = t\},$$

para todo $t \in I$. Neste caso, cada Σ_t é uma esfera geodésica de raio $\arcsin(\sqrt{1-t^2})$ em S^3 e área $\mathcal{H}^2(\Sigma_t) = 4\pi(1-t^2)$. Além disso, essas esferas são concêntricas e degeram-se nos pontos antípodas correspondentes aos centros $\Sigma_1 = (0, 0, 0, 1)$ e $\Sigma_{-1} = (0, 0, 0, -1)$, para $t \in \{-1, 1\}$. Portanto, a família $\{\Sigma_t\}$ é um *sweepout* com $T = \{-1, 1\}$ e $P = \emptyset$.

EXEMPLO 1.3. Considere novamente a esfera redonda $S^3 \subset \mathbb{R}^4$. Neste exemplo, construiremos uma família de toros bidimensionais que formam um *sweepout*. Para cada $t \in I$, tome

$$\Sigma_t = \left\{ x \in S^3 : x_1^2 + x_2^2 = \left(\frac{t+1}{2}\right)^2 \text{ e } x_3^2 + x_4^2 = 1 - \left(\frac{t+1}{2}\right)^2 \right\}.$$

Escrevendo $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ da maneira natural, temos que

$$\Sigma_t = S^1\left(\frac{t+1}{2}\right) \times S^1\left(\sqrt{1 - \left(\frac{t+1}{2}\right)^2}\right),$$

onde $S^1(r)$ denota a circunferência de raio r centrada na origem de \mathbb{R}^2 . Como no caso anterior, para $t \in \{-1, 1\}$, as superfícies Σ_t degeneram-se em conjuntos de área nula. Neste caso, Σ_1 e Σ_{-1} são as circunferências $S^1(1) \times \{(0, 0)\}$ e $\{(0, 0)\} \times S^1(1)$, respectivamente. Novamente, $\{\Sigma_t\}$ é *sweepout* com $T = \{-1, 1\}$ e $P = \emptyset$.

EXEMPLO 1.4. Sejam M uma variedade Riemanniana tridimensional qualquer e $f : M \rightarrow I$ uma função de Morse. Além disso, suponha que f tem um único máximo local e um único mínimo local; a saber, os pontos $f^{-1}(1)$ e $f^{-1}(-1)$, respectivamente. Neste caso, a família dos níveis de f

$$\Sigma_t = \{x \in M : f(x) = t\}$$

forma um *sweepout* para as escolhas $T = \{t \in I : t \text{ é valor crítico de } f\}$ e $P = \{x \in M : x \text{ é ponto crítico de } f\}$. Estes conjuntos são finitos porque pontos críticos de uma função de Morse são isolados e M é compacta. A hipótese sobre a unicidade de máximos e mínimos locais é adicionada para garantir que a família Σ_t satisfaz a condição (c2).

Em seguida apresentaremos a noção de homotopia entre *sweepouts*. Ela é de fundamental importância na teoria, pois proporciona as classes de *sweepouts* para as quais o método min-max pode ser aplicado. A fim de introduzir esta ideia, usaremos a seguinte notação.

DEFINIÇÃO 1.5. Dizemos que um difeomorfismo $\varphi : M \rightarrow M$ é isotópico à identidade se existe uma aplicação diferenciável $\psi : M \times [0, 1] \rightarrow M$ satisfazendo as seguintes propriedades:

- (i) $\psi(\cdot, s)$ é difeomorfismo de M , para todo $s \in [0, 1]$
- (ii) $\psi(\cdot, 0) = \varphi$ e $\psi(\cdot, 1) = id_M$.

Usamos $Dif_0(M)$ para denotar o conjunto dos difeomorfismos de M que são isotópicos à identidade. Uma aplicação ψ que satisfaz (i) e (ii) é dita uma isotopia de M . Usamos $\mathfrak{I}\mathfrak{s}$ para denotar o conjunto de todas as isotopias.

Se $\partial M \neq \emptyset$, exigimos que as isotopias de M fixem uma vizinhança do bordo. Em particular, se $\varphi \in Dif_0(M)$, então $\varphi(x) = x$, para todo $x \in \partial M$.

PROPOSIÇÃO 1.6. *Sejam $\{\Sigma_t\}_t$ um sweepout e $\psi : I \times M \rightarrow M$ uma aplicação diferenciável (de classe C^∞) tal que $\psi(t, \cdot) \in Dif_0(M)$, para todo $t \in I$. Então $\{\psi(t, \Sigma_t)\}_{t \in I}$ é um sweepout.*

DEFINIÇÃO 1.7. Seja Λ uma coleção de *sweepouts*. Dizemos que Λ é (homotopicamente) saturada se:

- (a) dados $\{\Sigma_t\}_{t \in I} \in \Lambda$ e $\psi \in C^\infty(I \times M, M)$ tal que $\psi(t, \cdot) \in Dif_0(M)$, para todo $t \in I$, então $\{\psi(t, \Sigma_t)\}_{t \in I} \in \Lambda$, e
- (b) existe $N_0 > 0$ tal que $P \subset M$, o qual depende do *sweepout*, tem no máximo N_0 pontos para todo $\{\Sigma_t\}_{t \in I} \in \Lambda$.

Uma maneira de construir coleções saturadas de *sweepouts* consiste em considerar todos os *sweepouts* homotópicos, no sentido da Proposição 1.6, a um *sweepout* fixo. Neste caso, o item (a) é válido por construção. Além disso, é imediato verificar que se $T \subset I$ e $P \subset M$ são os conjuntos finitos usados para justificar que $\{\Sigma_t\}$ é *sweepout*, então para qualquer *sweepout* homotópico a $\{\Sigma_t\}$, podemos escolher o subconjunto finito de M com no máximo $(\#T) \cdot (\#P)$ pontos. O que verifica a propriedade (b) acima.

O próximo ingrediente da teoria é a *width* associada a uma coleção saturada Λ . A *width* é o invariante min-max básico. O objetivo da teoria é a prova da existência de superfícies mínimas, suaves, fechadas e mergulhadas. Em outras palavras, uma superfície suave, fechada e mergulhada que é ponto crítico da área. Como no caso de geodésicas fechadas, a *width* representa o valor da área da superfície obtida.

DEFINIÇÃO 1.8. A *width* de M associada a Λ é definida por

$$W(M, \Lambda) = \inf_{\{\Sigma_t\} \in \Lambda} \max\{\mathcal{H}^2(\Sigma_t) : t \in I\}.$$

Seja $\{\Sigma_t^{(n)}\}$, $n \in \mathbb{N}$, uma sequência de *sweepouts* em uma família saturada Λ , que é minimizante em relação à *width*; ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max\{\mathcal{H}^2(\Sigma_t^{(n)}) : t \in I\} = W(M, \Lambda).$$

Se $\{t_n\}$ é uma sequência de parâmetros $t_n \in I$ tal que

$$\mathcal{H}^2(\Sigma_{t_n}^{(n)}) \rightarrow W(M, \Lambda),$$

dizemos que a sequência $\{\Sigma_{t_n}^{(n)}\}$ é uma sequência min-max.

Tendo descrito os principais objetos da teoria, apresentamos o Teorema min-max para superfícies mínimas na seguinte forma:

TEOREMA 1.9. *Sejam (M^3, g) uma variedade Riemanniana compacta, orientável e sem bordo, e Λ uma coleção saturada de sweepouts com width $W(M, \Lambda) > 0$. Então, existe uma sequência min-max que converge, no sentido de varifolds, para uma superfície mínima fechada e mergulhada Σ , possivelmente desconexa e com multiplicidades; i.e., como varifold*

$$\Sigma = \sum_{i=1}^{\ell} \mathbf{V}(\Sigma_i, n_i),$$

onde Σ_i são superfícies mínimas que coincidem com as componentes conexas do suporte de Σ , n_i são inteiros positivos e $\mathbf{V}(\Sigma_i, n_i)$ é o varifold retificável associado ao par (Σ_i, n_i) , seguindo a notação da Seção 2. Além disso, a massa total de Σ é igual a $W(M, \Lambda)$.

No caso de variedades com bordo $\partial M \neq \emptyset$, temos o seguinte resultado:

TEOREMA 1.10. *Seja (M^3, g) uma variedade Riemanniana compacta, orientável e com bordo $\partial M \neq \emptyset$ estritamente convexo em média; o vetor curvatura média $\vec{H}_{\partial M}$ é não nulo e aponta para dentro de M em todo $x \in \partial M$. Seja Λ uma coleção saturada de sweepouts com $W(M, \Lambda) > \mathcal{H}^2(\partial M)$. Então, existe uma sequência min-max que converge, como varifolds, para uma superfície mínima fechada e mergulhada Σ , possivelmente desconexa e com multiplicidades, contida em $\text{int}(M)$ e com massa total $W(M, \Lambda)$.*

2. Deformação pull-tight de varifolds

O objetivo principal da presente seção é a aplicação de uma ideia motivada pelo processo de encurtamento de curvas de Birkhoff. Mostraremos como obter uma sequência minimizante de *sweepouts* com a propriedade que todo limite min-max é estacionário em M . Lembre as definições de primeira variação e varifolds estacionários apresentada na Seção 2 do Capítulo 1. Como feito no Capítulo 2, construiremos um processo de encurtamento para deformar todas as fatias Σ_t^i de uma sequência minimizante.

Seja A o conjunto dos varifolds em M^3 de massa total limitada por uma constante $C > 0$, ou seja, $\|V\|(M) \leq C$. Vamos usar A_∞ para representar o espaço dos $V \in A$ que são estacionários em M . Usaremos a métrica \mathbf{F} do espaço de varifolds, a qual metriza a topologia fraca em A , para decompor o complementar de A_∞ em A na seguinte forma:

$$A_1 = \{V \in A : 2^{-1} \leq \mathbf{F}(V, A_\infty)\}$$

e, para todo $k \geq 2$,

$$A_k = \{V \in A : 2^{-k} \leq \mathbf{F}(V, A_\infty) \leq 2^{-k+1}\}.$$

Para cada $V \in A_k$, $k \geq 1$, temos que $V \neq A_\infty$ e, em particular, não é estacionário em M . Isto implica que existe um campo vetorial $X_V \in \mathfrak{X}(M)$, com $\|X_V\|_{C^1} \leq 1$, na direção do qual o primeira variação da área de V é

estritamente negativa:

$$\delta V(X_V) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \|\Phi_t(\cdot) \# V\|(M) < 0,$$

onde $\{\Phi_t\}_{t \geq 0}$ denota o fluxo do campo X_V .

Vamos construir uma aplicação contínua $H : A \rightarrow \mathfrak{X}(M)$, correspondente a uma escolha de um campo vetorial $H(V)$, para cada $V \in A$, de modo que $\delta V(H(V)) < 0$, para todo $V \in A \setminus A_\infty$.

Pela continuidade da primeira variação da área, a qual pode ser vista como consequência da fórmula apresentada na Proposição 2.2, e pelo fato de que a métrica \mathbf{F} metriza a topologia fraca, segue-se que: para todo $V \in A \setminus A_\infty$, existe $r(V) > 0$ satisfazendo

$$(16) \quad \delta W(X_V) < 0, \text{ para todo } W \text{ com } \mathbf{F}(W, V) < r(V).$$

A seguir, provaremos uma versão geral de (16), na qual o campo X_V e as grandezas que representam o raio $r(V)$ e o quão negativa é a primeira derivada da área dependem continuamente de V .

PROPOSIÇÃO 2.1. *Existe aplicação contínua $H : A \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ que é nula em A_∞ , i.e., $H(V) = 0$, para todo $V \in A_\infty$, e que satisfaz*

$$(17) \quad \delta W(H(V)) \leq -h(\mathbf{F}(V, A_\infty)),$$

sempre que $V \in A \setminus A_\infty$ e $\mathbf{F}(W, V) \leq r(\mathbf{F}(V, A_\infty))$, onde $r, h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ são funções contínuas positivas com $r(d) \rightarrow 0$ e $h(d) \rightarrow 0$, quando $d \rightarrow 0^+$.

PROVA. Para cada $V \in A \setminus A_\infty$, escolha $r(V) > 0$ satisfazendo (16) e pequeno suficiente de modo que se $V \in A_k$, então a bola centrada em V de raio $r(V)$ na métrica \mathbf{F} cumpre a inclusão

$$B_{r(V)}^{\mathbf{F}}(V) \subset A_{k-1} \cup A_k \cup A_{k+1},$$

ou apenas $A_1 \cup A_2$ se $k = 1$. Pela compacidade de A_k , existe cobertura finita $\{U_i^k\}$, $i = 1, 2, \dots, N(k)$, de A_k 1por bolas abertas

$$U_i^k = B_{r_i^k}^{\mathbf{F}}(V_i^k), \text{ com } V_i^k \in A_k \text{ e } r_i^k = r(V_i^k).$$

Seja \tilde{U}_i^k a bola concêntrica a U_i^k de raio $r_i^k/2$. Suponha, sem perda de generalidade, que a família $\{\tilde{U}_i^k\}_i$ também cobre A_k . Existe $c(k) > 0$ tal que

$$\delta W(X_i^k) \leq -c(k) < 0, \text{ para todo } W \in U_i^k,$$

onde $X_i^k = X_{V_i^k}$ é um campo de vetores com $\|X_i^k\|_{C^1} \leq 1$ e $\delta V_i^k(X_i^k) < 0$.

Considere as funções contínuas definidas em A por

$$\psi_i^k(V) = \mathbf{F}(V, A \setminus \tilde{U}_i^k).$$

Observe que cada ψ_i^k é positiva em \tilde{U}_i^k e que a soma $\psi(V) = \sum_{k,i} \psi_i^k(V)$ é bem-definida e positiva em toda a região $A \setminus A_\infty$. Portanto, $\{\varphi_i^k = \psi_i^k/\psi\}_{k,i}$ é uma partição da unidade associada à cobertura $\{\tilde{U}_i^k\}_{k,i}$ de $A \setminus A_\infty$.

Seja $H : A \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ a aplicação contínua definida por

$$(18) \quad H(V) = \mathbf{F}(V, A_\infty) \sum_{k,i} \varphi_i^k(V) X_i^k.$$

Considere ainda funções contínuas $r, h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ satisfazendo: se $V \in \tilde{U}_i^k$ e $\mathbf{F}(W, V) < r(\mathbf{F}(V, A_\infty))$, então $W \in U_i^k$ e $h(\mathbf{F}(V, A_\infty)) < c(k)$. Observe que, para tanto, é suficiente que

$$r(\mathbf{F}(V, A_\infty)) \leq \frac{1}{2} \min\{r_i^k : V \in \tilde{U}_i^k\}$$

e

$$h(\mathbf{F}(V, A_\infty)) \leq \min\{c(k) : V \in \tilde{U}_i^k\}.$$

Isto é obtido se as funções r e h são escolhidas de modo que

$$0 < r(d) \leq \frac{1}{2} \min\{r_i^\ell : k-1 \leq \ell \leq k+1\},$$

e

$$0 < h(d) \leq \min\{c(k-1), c(k), c(k+1)\}$$

para todo $2^{-k} \leq d \leq 2^{-k+1}$. Observe que $r(d) \rightarrow 0$, quando $d \rightarrow 0^+$. De fato, nenhuma bola U_i^k intersecta o conjunto dos varifolds estacionários, embora esteja a uma distância de A_∞ que tende a zero quando $k \rightarrow \infty$. Em particular, r_i^k aproxima-se de zero para k grande. Podemos supor, sem perda de generalidade, que também temos $h(d) \rightarrow 0$, quando $d \rightarrow 0^+$.

Finalmente, observe que H é identicamente nula em A_∞ . Além disso, pela expressão que define $H(V)$, temos

$$\delta W(H(V)) = \mathbf{F}(V, A_\infty) \sum_{k,i} \varphi_i^k(V) \delta W(X_i^k).$$

Pela construção, $\varphi_i^k(V) \neq 0$, e o campo X_i^k afeta a primeira variação da área de W na direção de $H(V)$, se, e só se, $V \in \tilde{U}_i^k$. Em particular, as escolhas de r e h garantem que se $\varphi_i^k(V) \neq 0$ e $\mathbf{F}(W, V) < r(\mathbf{F}(V, A_\infty))$, então $W \in U_i^k$, donde segue-se

$$\begin{aligned} \delta W(H(V)) &\leq -\mathbf{F}(V, A_\infty) \sum_{k,i} \varphi_i^k(V) c(k) \\ &\leq -\mathbf{F}(V, A_\infty) \cdot h(\mathbf{F}(V, A_\infty)). \end{aligned}$$

□

Resumindo, a Proposição 2.1, nos diz que existe uma escolha contínua de uma direção na qual deformar cada varifold não estacionário de A para diminuir área. Consequentemente, deformando V pelo fluxo do campo $H(V)$, obtemos um caminho contínuo de varifolds $V(t)$ que começa por $V(0) = V$ e que, para $t > 0$ suficientemente pequeno, $V(t)$ tem área estritamente menor que $\|V\|(M)$. O próximo passo trata da escolha de um tempo de deformação para cada um desses varifolds. A partir desta escolha, o processo de encurtamento de varifolds estará construído.

PROPOSIÇÃO 2.2. *Existe aplicação $\mathcal{P} : A \rightarrow \mathcal{V}(M)$ que é contínua e satisfaz as seguintes propriedades:*

- (1) $\mathcal{P}(V) = V$, para todo $V \in A_\infty$,
- (2) $\|\mathcal{P}(V)\|(M) < \|V\|(M)$, para $V \in A \setminus A_\infty$.

Além disso, existe função contínua $T : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que $\mathcal{P}(V)$ corresponde à imagem de V pelo difeomorfismo associado ao tempo $T(\mathbf{F}(V, A_\infty))$ do fluxo de $H(V)$, onde $H : A \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ é a aplicação construída na Proposição 2.1.

PROVA. Para cada $V \in A$, seja $\{\Phi_V(t, \cdot)\}_{t \geq 0}$ o fluxo do campo $H(V)$. Como $H(V)$ depende continuamente de V , o teorema de dependência contínua de soluções de equações diferenciais ordinárias e a Proposição 2.4 podem ser usados para verificar a continuidade da aplicação $\Psi : [0, 1] \times A \rightarrow \mathcal{V}(M)$ definida por

$$\Psi(t, V) = \Phi_V(t, \cdot)_{\#} V.$$

Fixado $k \geq 1$, existe $t_k > 0$ tal que $\mathbf{F}(\Psi(t, V), V) < r(\mathbf{F}(V, A_\infty))$, para todo par $(t, V) \in [0, t_k] \times A_k$. Isto segue da compacidade dos conjuntos A_k . Seja $T : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ uma função contínua satisfazendo:

- (i) $0 < T(t) \leq t_k$, para todo $2^{-k} \leq t \leq 2^{-k+1}$
- (ii) $\lim_{t \rightarrow 0} T(t) = 0$.

Conclui-se daí que, para todos $V \in A \setminus A_\infty$ e $0 \leq t \leq T(\mathbf{F}(V, A_\infty))$, temos

$$(19) \quad \mathbf{F}(\Psi(t, V), V) < r(\mathbf{F}(V, A_\infty)).$$

De fato, $V \in A_k$ para algum $k \geq 1$ e dizer que V pertence a A_k significa que a distância desse varifold a A_∞ na métrica \mathbf{F} está entre 2^{-k} e 2^{-k+1} . Pela escolha da função contínua T , item (i), segue-se que $0 < T(\mathbf{F}(V, A_\infty)) \leq t_k$. Donde segue (19).

Aplicando a Proposição 2.1 para $W = \Psi(t, V)$, temos

$$(20) \quad \delta\Psi(t, V)(H(V)) \leq -h(\mathbf{F}(V, A_\infty)),$$

para todo $0 \leq t \leq T(\mathbf{F}(V, A_\infty))$. Integrando a expressão acima, obtemos

$$(21) \quad \|\Psi(T(\mathbf{F}(V, A_\infty)), V)\|(M) \leq \|V\|(M) - T(\mathbf{F}(V, A_\infty)) \cdot h(\mathbf{F}(V, A_\infty)).$$

Finalmente, defina $\mathcal{P}(V) = \Psi(T(\mathbf{F}(V, A_\infty)), V)$, para todo $V \in A \setminus A_\infty$, e $\mathcal{P}(V) = V$, se o varifold V pertence a A_∞ . Pela propriedade (ii) da função contínua T , segue-se que a aplicação $\mathcal{P} : A \rightarrow \mathcal{V}(M)$ assim definida é contínua com respeito à métrica \mathbf{F} . Além disso, por (21) temos

$$\|\mathcal{P}(V)\|(M) \leq \|V\|(M) - \ell(\mathbf{F}(V, A_\infty)),$$

onde $\ell(d) = T(d) \cdot h(d)$ é uma função contínua e positiva que tende a zero quando $d \rightarrow 0^+$. \square

Escolha uma sequência minimizante $\{\{\Sigma_t^i\}_t\}_i \subset \Lambda$ e defina $\Gamma_t^i = \mathcal{P}(\Sigma_t^i)$, onde \mathcal{P} é a deformação construída na proposição anterior. Segue daquele resultado que podemos representar Γ_t^i na forma

$$\Gamma_t^i = \Omega_t^i(1, \Sigma_t^i),$$

onde $\{\Omega_t^i(s, \cdot)\}_{s \geq 0}$ é o fluxo de um campo vetorial $H_t^i \in \mathfrak{X}(M)$ que depende continuamente de t . De fato, seguindo a notação utilizada na prova, basta considerar, para todo $x \in M$, $\Omega_t^i(s, x) = \Phi_{\Sigma_t^i}(sT(\mathbf{F}(\Sigma_t^i, A_\infty)), x)$.

Fixe $i \in \mathbb{N}$ e tome $\varepsilon_i > 0$ pequeno (a ser escolhido). Temos uma aplicação contínua $H^i : I \rightarrow \mathfrak{X}(M)$, que associa H_t^i a cada $t \in I$. Considere uma aplicação suave $\tilde{H}^i : I \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ tal que, para todo $t \in I$,

$$\|H_t^i - \tilde{H}_t^i\|_{C^1} \leq \varepsilon_i.$$

Usamos $\{\tilde{\Omega}_t^i(s, \cdot)\}_{s \geq 0}$ para denotar o fluxo de \tilde{H}_t^i e $\tilde{\Gamma}_t^i = \tilde{\Omega}_t^i(1, \Sigma_t^i)$. Com isto, temos que $\{\tilde{\Gamma}_t^i\}_t \in \Lambda$, para todo $i \in \mathbb{N}$.

Além disso, se ε_i é suficientemente pequeno, podemos supor que $\Omega_t^i(1, \cdot)$ e $\tilde{\Omega}_t^i(1, \cdot)$, bem como suas derivadas primeiras, estão arbitrariamente próximas. Por outro lado,

$$\mathcal{H}^2(\psi(\Sigma)) = \int J\psi(x, T_x\Sigma) d\Sigma,$$

onde ψ é um difeomorfismo de M e $\Sigma^2 \subset M$ é uma superfície, possivelmente com um número finito de pontos singulares; como as fatias dos *sweepouts*. Na expressão acima, $J\psi(x, T_x\Sigma)$ é o determinante Jacobiano da diferencial $d\psi_x$ restrito a $T_x\Sigma$. Portanto, a escolha de ε_i pode ser feita de modo que

$$(22) \quad |\mathcal{H}^2(\Gamma_t^i) - \mathcal{H}^2(\tilde{\Gamma}_t^i)| \leq \frac{1}{i},$$

para todo $t \in I$.

Seguindo os mesmos passos do argumento explicado no parágrafo anterior, podemos fazer com que a escolha de ε_i implique que $\mathbf{F}(\Gamma_t^i, \tilde{\Gamma}_t^i) \leq i^{-1}$. A fim de simplificar a notação, daqui em diante usaremos $\Omega_t^i = \Omega_t^i(1, \cdot)$. Observe que, para toda $\phi \in C_c(G_2(\mathbb{R}^L))$, temos

$$\begin{aligned} \Gamma_t^i(\phi) - \tilde{\Gamma}_t^i(\phi) &= \int J\Omega_t^i(x, T_x\Sigma_t^i) \cdot \phi(\Omega_t^i(x), d\Omega_t^i(T_x\Sigma_t^i)) d\Sigma_t^i \\ &\quad - \int J\tilde{\Omega}_t^i(x, T_x\Sigma_t^i) \cdot \phi(\tilde{\Omega}_t^i(x), d\tilde{\Omega}_t^i(T_x\Sigma_t^i)) d\Sigma_t^i. \end{aligned}$$

Uma simples manipulação algébrica nos permite escrever esta diferença como

$$\begin{aligned} &\int J\Omega_t^i(x, T_x\Sigma_t^i) (\phi(\Omega_t^i(x), d\Omega_t^i(T_x\Sigma_t^i)) - \phi(\tilde{\Omega}_t^i(x), d\tilde{\Omega}_t^i(T_x\Sigma_t^i))) d\Sigma_t^i \\ &\quad - \int (J\tilde{\Omega}_t^i(x, T_x\Sigma_t^i) - J\Omega_t^i(x, T_x\Sigma_t^i)) \phi(\tilde{\Omega}_t^i(x), d\tilde{\Omega}_t^i(T_x\Sigma_t^i)) d\Sigma_t^i. \end{aligned}$$

Portanto, usando que as Σ_t^i têm áreas limitadas uniformemente em t e i , temos: se $|\phi| \leq 1$, $\text{Lip}(\phi) \leq 1$ e Ω_t^i e $\tilde{\Omega}_t^i$ estão suficientemente próximas na topologia C^1 , podemos supor que

$$\mathbf{F}(\Gamma_t^i, \tilde{\Gamma}_t^i) = \sup\{\Gamma_t^i(\phi) - \tilde{\Gamma}_t^i(\phi) : \phi \in C_c(G_k(\mathbb{R}^L)), |\phi| \leq 1 \text{ e } \text{Lip}(\phi) \leq 1\} \leq \frac{1}{i}.$$

A existência de $\varepsilon_i > 0$ satisfazendo estas propriedades também pode ser verificada indiretamente por um argumento de compacidade, sem usar as expressões explícitas da massa e da métrica \mathbf{F} .

Na proposição seguinte, apresentamos a principal propriedade da sequência de *sweepouts* $\{\{\tilde{\Gamma}_t^i\}_t\}_i \subset \Lambda$.

PROPOSIÇÃO 2.3. *Para todo $\varepsilon > 0$, existem $\delta > 0$ e $N \in \mathbb{N}$ tais que*

$$\text{se } i > N \text{ e } \mathcal{H}^2(\tilde{\Gamma}_t^i) > W - \delta, \text{ então } \mathbf{F}(\tilde{\Gamma}_t^i, A_\infty) < \varepsilon.$$

PROVA. Fixado $\varepsilon > 0$, observe que se $i \geq 2/\varepsilon$, então a escolha de $\tilde{\Gamma}_t^i$ próximo de Γ_t^i garante que se $\mathbf{F}(\tilde{\Gamma}_t^i, A_\infty) > \varepsilon$, então $\mathbf{F}(\Gamma_t^i, A_\infty) > \varepsilon/2$.

Afirmamos que existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que, para $V \in A$,

$$\text{se } \mathbf{F}(\mathcal{P}(V), A_\infty) > \varepsilon/2, \text{ então } \mathbf{F}(V, A_\infty) > \varepsilon_1.$$

Suponha, por contradição, que não existe ε_1 com tal propriedade. Neste caso, existiria sequência $V_i \in A$ tal que $\mathbf{F}(\mathcal{P}(V_i), A_\infty) > \varepsilon/2$, mas $\mathbf{F}(V_i, A_\infty)$ tende a zero. Pela compacidade de A , a menos de uma subsequência, admita que $V_i \rightarrow V$, $V \in A_\infty$. Pela continuidade de \mathcal{P} , temos que $\mathcal{P}(V_i)$ tende a $\mathcal{P}(V) = V$, pois $V \in A_\infty$. O que contradiz a hipótese $\mathbf{F}(\mathcal{P}(V_i), A_\infty) > \varepsilon/2$.

Em seguida, observe que existe $\ell_0 > 0$ tal que se $V \in A$, $\mathbf{F}(V, A_\infty) > \varepsilon_1$, então $\|\mathcal{P}(V)\|(M) \leq \|V\|(M) - \ell_0$. Caso contrário, existiria uma sequência $V_i \in A$ com $\mathbf{F}(V_i, A_\infty) > \varepsilon_1$ e $\|V_i\|(M) - i^{-1} \leq \|\mathcal{P}(V_i)\|(M) < \|V_i\|(M)$. De modo análogo ao argumento anterior, a menos de subsequência, teríamos $V_i \rightarrow V$, com $\|\mathcal{P}(V)\|(M) = \|V\|(M)$. O que implica, pela propriedade (2) da Proposição 2.2, que $V \in A_\infty$. Contradizendo a hipótese $\mathbf{F}(V_i, A_\infty) > \varepsilon_1$.

Finalmente, escolha $N \in \mathbb{N}$, tal que $N \geq 2/\varepsilon$ e, para todo $i \geq N$,

$$(23) \quad \sup\{\mathcal{H}^2(\Sigma_t^i) : t \in I\} \leq W + \frac{\ell_0}{2} - \frac{1}{i}.$$

Lembrando que $\Gamma_t^i = \mathcal{P}(\Sigma_t^i)$, temos que, para todo $i \geq 2/\varepsilon$,

$$(24) \quad \text{se } \mathbf{F}(\tilde{\Gamma}_t^i, A_\infty) > \varepsilon, \text{ então } \mathcal{H}^2(\Gamma_t^i) \leq \mathcal{H}^2(\Sigma_t^i) - \ell_0.$$

Combinando as expressões (22), (23) e (24), concluímos que para todo $i \geq N$, se $\mathbf{F}(\tilde{\Gamma}_t^i, A_\infty) > \varepsilon$, então $\mathcal{H}^2(\tilde{\Gamma}_t^i) \leq W - \ell_0/2$. Isto prova que a afirmação feita no enunciado da proposição é verdadeira com $\delta = \ell_0/2$. \square

3. Argumento combinatório

Seja Λ uma coleção saturada de *sweepouts* com *width* $W(M, \Lambda) > 0$. Nessa seção, mostraremos que toda sequência minimizante em Λ tem uma sequência min-max com uma propriedade variacional adicional; a propriedade quase-minimizante (*almost minimizing*) de Pitts.

Como vimos, limites min-max são varifolds de massa $W = W(M, \Lambda)$, os quais, mesmo quando retificáveis, com multiplicidade inteira e estacionários, podem estar longe de ser o varifold associado a uma superfície suave de M .

A propriedade quase-minimizante de Pitts desempenha papel fundamental na teoria de regularidade que segue o argumento descrito neste capítulo.

DEFINIÇÃO 3.1. Sejam $U \subset M$ um aberto, $\mathcal{S} = \{\{\Sigma_t^i\}_t\}_i$ uma sequência minimizante em Λ e $\{\Sigma_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ uma sequência min-max proveniente de \mathcal{S} . Dizemos que $\{\Sigma_i\}_i$ é quase-minimizante em U se existe uma sequência $\{\varepsilon_i\}_i$ de números positivos tal que $\varepsilon_i \rightarrow 0$, quando $i \rightarrow \infty$, e para toda isotopia $\psi \in \mathfrak{Is}(U)$ satisfazendo

$$\mathcal{H}^2(\psi(\Sigma_i, s)) \leq \mathcal{H}^2(\Sigma_i) + \frac{\varepsilon_i}{8},$$

para todo $s \in [0, 1]$, temos $\mathcal{H}^2(\psi(\Sigma_i, 1)) \geq \mathcal{H}^2(\Sigma_i) - \varepsilon_i$.

Neste caso, dizemos que Σ_i é ε_i -quase minimizante em U . Se a sequência Σ_i converge a um varifold min-max V , também dizemos que V é quase minimizante no aberto U .

EXEMPLO 3.2. Seja V o varifold em \mathbb{R}^3 associado à união dos planos coordenados xy e xz . V é um exemplo de varifold estacionário que não pode ser o limite de uma sequência quase minimizante em uma bola centrada na origem. Intuitivamente, toda superfície mergulhada suficientemente próxima de V pode ser deformada isotopicamente por superfícies de áreas cada vez menores que se afastam de um dos planos $y + z = 0$ ou $y - z = 0$, de modo similar às superfícies $yz = \delta$. A demonstração formal deste fato é indireta e as deformações mencionadas não são explícitas.

Usaremos a notação $\mathcal{A}(x; s, t)$ para representar o anel da variedade M centrado em $x \in M$, e de raio interior s e exterior t , onde $0 < s < t$.

PROPOSIÇÃO 3.3. *Seja $\mathcal{S} = \{\{\Sigma_t^i\}_t\}_i$ uma sequência minimizante em Λ . Existe sequência min-max $\{\Sigma_i\}_i$ de \mathcal{S} que é quase minimizante em anéis pequenos de M ; mais precisamente, para todo $x \in M$, existe $r(x) > 0$ tal que $\{\Sigma_i\}_i$ é quase minimizante em todo $\mathcal{A}(x; s, t)$, com $0 < s < t < r(x)$.*

PROVA. A fim de demonstrar este resultado, mostraremos a existência de uma sequência min-max $\{\Sigma_i\}_i$ de \mathcal{S} e de uma sequência de números reais $\varepsilon_i \rightarrow 0$ com a seguinte propriedade: para todo par (U^1, U^2) de subconjuntos de M tal que $\text{dist}(U^1, U^2) \geq 2 \min\{\text{diam}(U^1), \text{diam}(U^2)\}$, Σ_i é ε_i -quase minimizante em algum dos subconjuntos U^1 ou U^2 .

Usamos \mathcal{CO} para denotar o conjunto dos pares (U^1, U^2) satisfazendo a relação entre distância e diâmetros recém mencionada.

Fixe $L \in \mathbb{N}$. Afirmamos que existem $i \in \mathbb{N}$ e $\Sigma_i = \Sigma_{t_i}^i$ tais que: $i > L$, $\mathcal{H}^2(\Sigma_i) \geq W - 1/L$ e, para todo par (U^1, U^2) de \mathcal{CO} ,

$$\Sigma_i \text{ é } \frac{1}{L}\text{-quase minimizante em } U^1 \text{ ou em } U^2.$$

Em outras palavras, vamos mostrar que existem fatias arbitrariamente grandes com a propriedade ε -quase minimizante em todo par de \mathcal{CO} , para algum $\varepsilon > 0$. Isto será provado por contradição.

Suponha que não seja possível encontrar $\Sigma_{t_i}^i$ com as propriedades desejadas. Isto quer dizer: para toda fatia Σ_t^i , com $i > L$ e $\mathcal{H}^2(\Sigma_t^i) \geq W - 1/L$, existe um par (U_t^1, U_t^2) de \mathcal{CO} tal que Σ_t^i não é $1/L$ -quase minimizante em ambos U_t^1 e U_t^2 . Logo, existem isotopias $\psi_t^j \in \mathfrak{Is}(U_t^j)$, $j = 1, 2$, satisfazendo

$$\mathcal{H}^2(\psi_t^j(\Sigma_t^i, s)) \leq \mathcal{H}^2(\Sigma_t^i) + \frac{1}{8L},$$

para todo $s \in [0, 1]$, e

$$\mathcal{H}^2(\psi_t^j(\Sigma_t^i, 1)) < \mathcal{H}^2(\Sigma_t^i) - \frac{1}{L}.$$

Sendo assim, para cada fatia grande, temos duas deformações, suportadas em domínios disjuntos (um par de \mathcal{CO}), ao longo das quais a área aumenta no máximo $(8L)^{-1}$ e que terminam em uma superfície de área menor que

$$\sup\{\mathcal{H}^2(\Sigma_t^i) : t \in I\} - 1/L.$$

Para i grande, concluímos que as superfícies finais dessas deformações não são muito grandes; i.e., têm área menor que $W - (2L)^{-1}$.

Para concluir o argumento, resta mostrar que é possível combinar as isotopias ψ_t^j para deformar todas as fatias grandes ao mesmo tempo e obter um *sweepout* sem nenhuma fatia muito grande. É por causa dessa deformação homotópica do *sweepout* que precisamos ter pelo menos duas isotopias que diminuam área para cada Σ_t^i grande.

A propriedade relevante dos pares de \mathcal{CO} que faz possível o argumento combinatório é a seguinte: dados (U^1, U^2) e (V^1, V^2) pares de \mathcal{CO} , existem $\alpha, \beta \in \{1, 2\}$ tais que $U^\alpha \cap V^\beta = \emptyset$.

Considere o conjunto compacto

$$K^i = \{t \in I : \mathcal{H}^2(\Sigma_t^i) \geq W - 1/L\}$$

dos índices correspondentes a fatias grandes de $\{\Sigma_t^i\}_t$.

Para todo $t \in K^i$, existe um intervalo aberto $I(t) \subset I$ centrado em t tal que, para todo $\tau \in I(t)$,

$$\mathcal{H}^2(\psi_t^j(\Sigma_\tau^i, s)) \leq \mathcal{H}^2(\Sigma_\tau^i) + \frac{1}{4L},$$

para todo $s \in [0, 1]$, e

$$\mathcal{H}^2(\psi_t^j(\Sigma_\tau^i, 1)) \leq \mathcal{H}^2(\Sigma_\tau^i) - \frac{1}{2L}.$$

Podemos cobrir o compacto K^i por finitos intervalos $I(t_1), \dots, I(t_\ell)$ como acima. Suponha, sem perda de generalidade, que os números t_k estão ordenados, $t_1 < \dots < t_\ell$, e que $I(t_k) \cap I(t_m) \neq \emptyset$ implica $|k - m| \leq 1$. A fim de simplificar a notação, usamos

$$I_k = I(t_k), U_k^j = U_{t_k}^j \text{ e } \psi_k^j = \psi_{t_k}^j.$$

Para cada $k \in \{1, \dots, \ell\}$, usaremos algumas das ψ_k^j para deformar as fatias Σ_t^i com $t \in I_k$. Suponha, a menos de repetir o processo a ser descrito

um número finito de vezes, que $I_k \cap I_{k+1} \neq \emptyset$, para todo $k = 1, \dots, \ell - 1$. Com isto, temos que coordenar a utilização das isotopias $\psi_k^1, \psi_k^2, \psi_{k+1}^1$ e ψ_{k+1}^2 na deformação de Σ_t^i , para t naquela interseção. Para resolver este problema, vamos deformar Σ_t^i usando até duas das quatro isotopias mencionadas simultaneamente. Explicaremos agora como efetuar a escolha das isotopias em cada intervalo I_k .

Pela propriedade dos pares de \mathcal{CO} , podemos escolher $\alpha_1, \beta_1 \in \{1, 2\}$ tais que $U_1^{\alpha_1} \cap U_2^{\beta_1} = \emptyset$. Suponha, sem perda de generalidade, que $\alpha_1 = \beta_1 = 1$. Defina

$$\begin{aligned} J_1 &= I_1, \varphi_1 = \psi_1^1 \text{ e } V_1 = U_1^1, \\ \varphi_2 &= \psi_2^1 \text{ e } V_2 = U_2^1. \end{aligned}$$

Vamos usar φ_1 para deformar todas as fatias Σ_t^i com $t \in J_1$. Também usaremos φ_2 para deformar as Σ_t^i com $t \in J_1 \cap I_2$. Pela escolha de φ_1 e φ_2 , essas isotopias têm suportes em domínios disjuntos. A isotopia ψ_1^2 não será usada, já ψ_2^2 pode vir a ser usada nos próximos passos.

Aplicamos novamente a propriedade dos pares de \mathcal{CO} para obter $\alpha_2, \beta_2 \in \{1, 2\}$ com $U_2^{\alpha_2} \cap U_3^{\beta_2} = \emptyset$. Temos duas possibilidades: $\alpha_2 = 1$ ou $\alpha_2 = 2$. No primeiro caso, definimos

$$\begin{aligned} J_2 &= I_2, \\ \varphi_3 &= \psi_3^{\beta_2} \text{ e } V_3 = U_3^{\beta_2}. \end{aligned}$$

Com isto, ψ_2^2 não será utilizada no argumento. Todas as Σ_t^i com $t \in J_2$ serão deformadas por φ_2 , e aquelas com $t \in J_2 \cap I_3$ também serão deformadas por φ_3 . Se $\alpha_2 = 2$, escolhemos intervalos abertos $J_2, J_3 \subset I_2$, tais que

$$J_2 \cup J_3 = I_2, J_1 \cap J_2 \neq \emptyset \text{ e } (J_2 \cap J_3) \cap (J_1 \cup I_3) = \emptyset.$$

Além disso, defina

$$\begin{aligned} \varphi_3 &= \psi_2^2 \text{ e } V_3 = U_2^2, \\ \varphi_4 &= \psi_3^{\beta_2} \text{ e } V_4 = U_3^{\beta_2}. \end{aligned}$$

Neste caso, todas as Σ_t^i com $t \in J_2 \cap J_3$ serão deformadas por ambas isotopias φ_2 e φ_3 , as quais são suportadas em domínios disjuntos. E as Σ_t^i com $t \in J_3 \cap I_3$ serão deformadas por φ_3 e φ_4 .

Indutivamente, obtemos:

- uma cobertura $\{J_1, \dots, J_R\}$ de K^i , a qual é um refinamento de $\{I_1, \dots, I_\ell\}$,
- conjuntos abertos V_1, \dots, V_R entre os U_k^j , e
- isotopias $\varphi_1, \dots, \varphi_R$ entre as ψ_k^j ,

tais que

- (A) $K^i \subset J_1 \cup \dots \cup J_R$,
- (B) $J_k \cap J_m \neq \emptyset$ e $k \neq m$ implica $|k - m| = 1$ e $dist(V_k, V_m) > 0$,
- (C) φ_k é suportada em V_k

(D) para todo $s \in [0, 1]$ e $\tau \in J_k$, temos

$$\mathcal{H}^2(\varphi_k(\Sigma_\tau^i, s)) \leq \mathcal{H}^2(\Sigma_\tau^i) + \frac{1}{4L},$$

e

$$\mathcal{H}^2(\varphi_k(\Sigma_\tau^i, 1)) \leq \mathcal{H}^2(\Sigma_\tau^i) - \frac{1}{2L}.$$

Escolha funções $\eta_k : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ de classe C^∞ , $k \in \{1, \dots, R\}$, tais que

- η_k é suportada em J_k , e
- para todo $t \in K^i$, existe $k \in \{1, \dots, R\}$ tal que $\eta_k(t) = 1$.

Para todo $s \in [0, 1]$ e $t \in I$, defina

$$\psi(\cdot, s; t) = \varphi_R(\cdot, s\eta_R(t)) \circ \dots \circ \varphi_1(\cdot, s\eta_1(t)).$$

Observe que $\{\psi(\cdot, s; t)\}_{s \in [0, 1]} \in \mathfrak{I}\mathfrak{s}$, para todo $t \in I$, e $\psi(\cdot, 1; t)$ é suave em $M \times I$. Logo, Γ_t^i é definida por $\psi(\Sigma_t^i, 1; t)$, então $\{\Gamma_t^i\} \in \Lambda$. Observe que Σ_t^i é deformada apenas pelas φ_k para as quais $\eta_k(t) \neq 0$.

Para finalizar a prova da afirmação, verifiquemos que

$$(25) \quad \sup\{\mathcal{H}^2(\Gamma_t^i) : t \in I\} \leq \max\{\sup\{\mathcal{H}^2(\Sigma_t^i) : t \in I\} - \frac{1}{4L}, W - \frac{1}{2L}\}.$$

Observe que se $t \notin K^i$, então $\mathcal{H}^2(\Sigma_t^i) < W - L^{-1}$ e t pertence a no máximo dois dos subconjuntos J_k . Pela primeira estimativa em (D), temos:

$$\mathcal{H}^2(\Gamma_t^i) \leq W - \frac{1}{L} + \frac{2}{4L} = W - \frac{1}{2L}.$$

E se $t \in K^i$, como um dos $\eta_k(t) = 1$, temos

$$\mathcal{H}^2(\Gamma_t^i) \leq \mathcal{H}^2(\Sigma_t^i) - \frac{1}{2L} + \frac{1}{4L} \leq \sup\{\mathcal{H}^2(\Sigma_t^i) : t \in I\} - \frac{1}{4L}.$$

Como $\{\{\Sigma_t^i\}_t\}_i$ é sequência minimizante, para i suficientemente grande, o lado direito da desigualdade (25) é estritamente menor que W . O que contradiz a definição de W e prova a afirmação feita no início desta demonstração.

Resumindo, temos uma sequência min-max $\{\Sigma_i\}$ de \mathcal{S} com $\mathcal{H}^2(\Sigma_i) \geq W - 1/i$ e tal que, para todo par (U^1, U^2) de \mathcal{CO} , Σ_i é $1/i$ -quase minimizante em pelo menos um dos U^j , $j = 1, 2$.

Por outro lado, observe que se $r > 0$ é suficientemente pequeno, $U^1 = B_r(x)$ e $U^2 = M \setminus B_{5r}(x)$, então $(U^1, U^2) \in \mathcal{CO}$, para todo $x \in M$. De fato, $\text{dist}(U^1, U^2) = 4r$ e $\text{diam}(U^1) = 2r$. Em particular, Σ_i é $(1/i)$ -quase minimizante em $B_r(x)$ ou em $M \setminus B_{5r}(x)$. Vamos analisar dois casos. No primeiro, supomos que existe $r > 0$ pequeno e $\mathcal{N} \subset \mathbb{N}$ infinito tais que

$$(26) \quad \Sigma_i \text{ é } (1/i)\text{-quase minimizante em } B_r(x),$$

para todo $i \in \mathcal{N}$ e $x \in M$. Neste caso, a proposição está provada, pois a função constante igual a r satisfaz o enunciado.

Resta analisar o caso em que: para todo $j \in \mathbb{N}$, existe $i(j) \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $i \geq i(j)$,

$$\Sigma_i \text{ é } (1/i)\text{-quase minimizante em } M \setminus B_{5/j}(x_j^i),$$

para algum $x_j^i \in M$. Aplicando um argumento diagonal e de subsequências, escolhamos $\mathcal{I}, \mathcal{J} \subset \mathbb{N}$ infinitos tais que x_j^i tende a $x_j \in M$, quando $i \rightarrow \infty$ com $i \in \mathcal{I}$, e $x_j \rightarrow x_\infty \in M$, quando $j \rightarrow \infty$ com $j \in \mathcal{J}$. Neste caso, para todo $r > 0$ pequeno, e $i \in \mathcal{I}$ grande, temos

$$\Sigma_i \text{ é } (1/i)\text{-quase minimizante em } M \setminus B_r(x_\infty).$$

Neste caso, defina $r(x) = \text{dist}(x, x_\infty)$, para todo $x \in M \setminus \{x_\infty\}$, e $r(x_\infty) > 0$ pequeno. Todo anel em M de centro x , raio interior positivo e raio exterior menor que $r(x)$, não passa por x_∞ . Isto encerra a prova da proposição. \square

4. Regularidade

Nesta seção, discutimos brevemente a teoria de regularidade de varifolds estacionários em M que são limites de sequências quase minimizantes em anéis pequenos. Dentre os ingredientes usados neste argumento, destacamos as estimativas de curvatura de Schoen para superfícies mínimas estáveis, [27]. Vimos que superfícies mínimas são pontos críticos do funcional área. Uma superfície mínima é dita estável em um aberto U se a segunda derivada da área é não negativa para todo campo variacional suportado em U . Uma consequência das estimativas de curvatura de Schoen é que para toda sequência de superfícies mínimas estáveis em U , existe uma subsequência que converge a uma superfície mínima estável.

Pelo que vimos nas seções anteriores, sabemos que toda sequência minimizante de *sweepouts* tem um limite min-max $V = \lim_{j \rightarrow \infty} \Sigma_j$ com essas propriedades, onde $\{\Sigma_j\}_j$ é uma sequência min-max. Isto segue da aplicação da Proposição 3.3 para a sequência minimizante da Proposição 2.3. Como cada fatia Σ_j tem um número finito, uniformemente controlado em j , de pontos singulares, é possível extrair uma subsequência de modo que as Σ_j são suaves em anéis pequenos.

Mostraremos como usar as Σ_j para construir superfícies de comparação para V em cada anel pequeno, e como usar tais superfícies para obter propriedades de regularidade de V .

A fim de explicar a construção das superfícies de comparação, sejam $U \subset M$ um aberto fixo e $V = \lim_{j \rightarrow \infty} \Sigma_j$ o varifold limite de uma sequência $\{\Sigma_j\}_j$ de fatias que satisfazem:

- (i) Σ_j é $1/j$ -quase minimizante em U ,
- (ii) Σ_j é suave em U , e
- (iii) V é estacionário em M .

Podemos assumir que U é um anel pequeno em M e que as propriedades (i) e (ii) acima também são válidas em anéis U' um pouco maiores que U .

Fixado $j \in \mathbb{N}$, considere o conjunto de isotopias de M , suportadas em U e que não fazem a área de Σ_j crescer mais que $1/8j$; i.e.,

$$\mathfrak{I}\mathfrak{s}_j(\Sigma_j, U) = \{\psi \in \mathfrak{I}\mathfrak{s}(U) : \mathcal{H}^2(\psi(\Sigma_j, s)) \leq \mathcal{H}^2(\Sigma_j) + \frac{1}{8j}, \text{ para todo } s \in [0, 1]\}.$$

Seja $\Sigma_{j,k} = \psi^k(\Sigma_j, 1)$, $k \in \mathbb{N}$, uma sequência que minimiza a área $\mathcal{H}^2(\psi(\Sigma_j, 1))$, dentre as isotopias $\psi \in \mathfrak{I}\mathfrak{s}_j(\Sigma_j, U)$. Suponha, a menos de subsequência, que $\Sigma_{j,k} \rightarrow V_j$ como varifolds, quando $k \rightarrow \infty$. Esta construção e a propriedade quase minimizante implicam que V_j cumpre:

- $V_j \cap (M \setminus U) = \Sigma_j \cap (M \setminus U)$,
- $\|V_j\|(M) \geq \mathcal{H}^2(\Sigma_j) - 1/j$, e
- $V_j \cap U$ é superfície mínima, suave, estável e mergulhada.

A regularidade das $V_j \cap U$ será discutida adiante.

Um limite da forma $\tilde{V} = \lim_{j \rightarrow \infty} V_j$, depois de uma possível passagem à subsequência, é um varifold em M que satisfaz:

- (I) \tilde{V} é estacionário em M ,
- (II) $\tilde{V} \cap (M \setminus U) = V \cap (M \setminus U)$,
- (III) $\|\tilde{V}\|(M) = \|V\|(M)$,
- (IV) $\tilde{V} \cap U$ é superfície mínima suave, estável e mergulhada.

Neste caso, dizemos que \tilde{V} é uma superfície de comparação para V em U . O fato (IV), é consequência da propriedade análoga dos V_j e das estimativas de curvatura de Schoen para superfícies mínimas estáveis. Para verificar que \tilde{V} é estacionário em M , observamos que ele é estacionário no complemento de \bar{U} , por coincidir com V em $M \setminus U$, e em anéis U' um pouco maiores que U , pela propriedade quase minimizante da sequência Σ_j em U' .

Observe que, pela construção, \tilde{V} também é limite de uma sequência $\{\Sigma_{j,k_j}\}_j$ quase minimizante em U . Portanto, podemos repetir o processo acima para obter superfícies de comparação para \tilde{V} .

Em seguida, mostramos como usar as superfícies de comparação para extrair propriedades de regularidade do varifold V . Mais precisamente, mostramos que V é um varifold retificável de multiplicidade inteira. Para este fim, introduzimos as noções de densidade e cones tangentes. Em geral, varifolds estacionários podem estar longe de ser superfícies mínimas suave. Por outro lado, estes objetos têm várias propriedades similares, como uma propriedade de monotonicidade e o princípio do máximo. No caso de varifolds em uma variedade Riemanniana M^3 , temos:

PROPOSIÇÃO 4.1. *Se $r > 0$ é pequeno, existe $C = C(r) > 0$ tal que: se V é estacionário em M , $x \in M$ e $0 < s < t < r$, então*

$$\frac{\|V\|(B_s(x))}{\pi s^2} \leq C \frac{\|V\|(B_t(x))}{\pi t^2}.$$

Além disso, $C(r) \rightarrow 1$, quando $r \rightarrow 0$.

Em particular, a proposição anterior garante que existe o limite

$$(27) \quad \Theta(x, V) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\|V\|(B_r(x))}{\pi r^2},$$

o qual é chamado de densidade de V em x . A fim de mostrar que o varifold estacionário V é retificável, é suficiente verificar que $\Theta(x, V) > 0$, para $\|V\|$ -q.t.p. $x \in M$, ver Teorema 42.4 em [25]. Seja $r_0 = r_0(M) > 0$ tal que toda bola $B_r(x)$, com $0 < r < r_0$, é estritamente convexa. Suponha ainda que a Proposição 4.1 aplica-se a r_0 .

PROPOSIÇÃO 4.2. *Se V é um varifold estacionário em M , $x \in \text{spt}(V)$ e $s > 0$ são tais que $4s < r_0$ e existe uma superfície de comparação \tilde{V} para V no anel $\mathcal{A}(x; s, 2s)$, então $\Theta(x, V) \geq (4C(r_0))^{-1}$.*

PROVA. Observamos que existe $y \in \tilde{V} \cap \mathcal{A}(x; s, 2s)$. Se não houvesse, encontraríamos um varifold não nulo suportado em $B_{r_0}(x)$. Como todas as bolas $B_r(x)$, com $r < r_0$ são estritamente convexas, a existência deste varifold contradiz o princípio do máximo.

Portanto, observando que para $y \in \tilde{V} \cap \mathcal{A}(x; s, 2s)$, temos a inclusão $B_{2s}(y) \subset B_{4s}(x)$, usando a propriedade (III) da superfície de comparação, e aplicando a Proposição 4.1, temos

$$\frac{\|V\|(B_{4s}(x))}{\pi(4s)^2} = \frac{\|\tilde{V}\|(B_{4s}(x))}{16\pi s^2} \geq \frac{\|\tilde{V}\|(B_{2s}(y))}{16\pi s^2} \geq \frac{1}{4C},$$

onde a última desigualdade é consequência da regularidade de $\tilde{V} \cap \mathcal{A}(x; s, 2s)$ e que isto implica que a densidade $\Theta(y, \tilde{V}) \geq 1$. \square

Com isto, sabemos que um varifold que admite superfícies de comparação em anéis pequenos é retificável. O próximo passo é que para todo $x \in \text{spt}(V)$, todo cone tangente a V em x é um múltiplo inteiro de um plano.

Suponha que M está isometricamente mergulhada em \mathbb{R}^L . Usamos D_ρ^x para denotar a aplicação que consiste em transladar x para a origem e depois multiplicar por ρ^{-1} em \mathbb{R}^L .

Definimos os cones tangentes a V em x como sendo os possíveis limites da forma $C = \lim_{n \rightarrow \infty} V_{\rho_n}^x$, onde $\rho_n \rightarrow 0$ e $V_{\rho_n}^x = (D_{\rho_n}^x)_\# V$. É fato que todo cone tangente a um varifold estacionário é um cone Euclidiano estacionário.

PROPOSIÇÃO 4.3. *Seja V um varifold estacionário em M e $x \in \text{spt}(V)$. Suponha que para todo $s > 0$ suficientemente pequeno, existe uma superfície de comparação \tilde{V}_s para V no anel $\mathcal{A}(x; s, 3s)$. Então, todo cone tangente a V em x é um múltiplo inteiro de um plano.*

PROVA. Seja $C = \lim_{n \rightarrow \infty} V_{\rho_n}^x$ um cone tangente a V em x . Para todo $n \in \mathbb{N}$ grande, existe superfície de comparação \tilde{V}_{ρ_n} para V em $\mathcal{A}(x; \rho_n, 3\rho_n)$. As propriedades de \tilde{V}_{ρ_n} implicam que $\tilde{V}_{\rho_n}^x = (D_{\rho_n}^x)_\# \tilde{V}_{\rho_n}$ satisfaz:

- $\tilde{V}_{\rho_n}^x$ é estacionário em $D_{\rho_n}^x(M)$,
- $\tilde{V}_{\rho_n}^x = V_{\rho_n}^x$ em $(D_{\rho_n}^x)(\mathcal{A}(x; \rho_n, 3\rho_n))$,

- para todo $\rho \in (0, 1) \cup (3, 4)$, temos

$$\|\tilde{V}_{\rho_n}^x\|(D_{\rho_n}^x(B_\rho(x))) = \|V_{\rho_n}^x\|(D_{\rho_n}^x(B_\rho(x))), \text{ e}$$

- $\tilde{V}_{\rho_n}^x \cap (D_{\rho_n}^x)(\mathcal{A}(x; \rho_n, 3\rho_n))$ é mínima estável e mergulhada.

A menos de passagem a uma subsequência, podemos supor que $\tilde{V}_{\rho_n}^x \rightarrow C'$. Observe que C' e C estão contidos em uma cópia de \mathbb{R}^3 , proveniente do limite $D_{\rho_n}^x(M) \rightarrow \mathbb{R}^3$. Usamos B_ρ para denotar a bola Euclideana de raio ρ centrada na origem de \mathbb{R}^3 . O limite C' tem as seguintes propriedades:

- C' é estacionário em \mathbb{R}^3 ,
- $C' = C$ em $B_1 \cup \mathcal{A}(0; 3, 4)$, onde $\mathcal{A}(0; 3, 4) = B_4 \setminus \overline{B_3}$,
- para todo $\rho \in (0, 1) \cup (3, 4)$, temos $\|C'\|(B_\rho) = \|C\|(B_\rho)$, e
- $C' \cap \mathcal{A}(0; 3, 4)$ é uma superfície mínima estável e mergulhada.

Usando (c) e que C é cone, temos que

$$\frac{\|C'\|(B_\rho)}{\pi\rho^2} = \frac{\|C\|(B_\rho)}{\pi\rho^2}$$

é constante para $\rho \in (0, 1) \cup (3, 4)$. Logo, temos igualdade na fórmula de monotonicidade do varifold estacionário C' , o que implica que C' também é cone. Em particular, por (d), $C' \cap \mathcal{A}(0; 3, 4)$ é um cone mínimo mergulhado. Donde segue que C' é suportado em um plano que passa pela origem. Por (b), o mesmo ocorre com C , o que conclui a prova. \square

Em particular, vemos que o varifold estacionário retificável V do exemplo 3.2, uma união de planos transversais em \mathbb{R}^3 , não admite superfícies de comparação em todo anel pequeno, logo, não é limite de uma sequência quase minimizante em anéis pequenos de M . Isto segue da Proposição 4.3, pois os cones tangentes àquele V em pontos pertencentes à interseção dos planos é o próprio V .

A conclusão da prova da regularidade do suporte de um varifold estacionário que admite superfícies de comparação em anéis pequenos usa o fato que observamos anteriormente que diz que: superfícies de comparação para V também admitem superfícies de comparação em anéis pequenos. Para mais detalhes, veja a Proposição 6.3 em [4].

Finalmente, voltamos à discussão sobre a regularidade das $V_j \cap U$ usadas na construção das superfícies de comparação. Esta parte também usa um processo iterativo de construção de superfícies de comparação. Lembrese que $V_j = \lim_k \Sigma_{j,k}$, onde $\{\Sigma_{j,k}\}_k$ é uma sequência que minimiza área entre as superfícies que são isotópicas a Σ_j ao longo de um caminho de superfícies com áreas menores ou iguais a $\mathcal{H}^2(\Sigma_j) + 1/8j$. A fim de construir superfícies de comparação para V_j em anéis pequenos em U , observa-se que: para todo $x \in U$, existe $\varepsilon > 0$ tal que, para todo k grande, se $\varphi \in \mathfrak{Is}(B_\varepsilon(x))$ e $\mathcal{H}^2(\varphi(\Sigma_{j,k}, 1)) \leq \mathcal{H}^2(\Sigma_{j,k})$, então existe $\psi \in \mathfrak{Is}_j(\Sigma_{j,k}, B_\varepsilon(x))$ com $\psi(\cdot, 1) = \varphi(\cdot, 1)$. Sendo assim, para todo anel An de centro x e contido em $B_\varepsilon(x)$, consideramos uma sequência $\{\varphi^\ell(\Sigma_{j,k}, 1)\}_\ell$ que minimiza área dentre as superfícies $\varphi(\Sigma_{j,k}, 1)$, com $\varphi \in \mathfrak{Is}(An)$. Suponha, a menos de

subsequências, que $\varphi^\ell(\Sigma_{j,k}, 1) \rightarrow W_{j,k}$ e $W_{j,k} \rightarrow W_j$. Neste caso, afirmamos que W_j é uma superfície de comparação para V_j em An . A propriedade de conservação da massa em M usa a observação feita sobre a possibilidade de escolher $\varphi^\ell \in \mathfrak{I}\mathfrak{s}_j(\Sigma_{j,k}, B_\varepsilon(x))$. Por Meeks-Simon-Yau [19], cada $W_{j,k} \cap An$ é uma superfície mínima estável e mergulhada. E a regularidade de $W_j \cap An$ segue das estimativas de curvatura de Schoen.

CAPÍTULO 4

Existência de infinitas hipersuperfícies mínimas

No capítulo 3, vimos que toda variedade Riemanniana tridimensional fechada admite superfície mínima suave, fechada e mergulhada. Para tanto, apresentamos a abordagem suave da teoria min-max.

Neste capítulo, apresentamos alguns elementos da teoria min-max de Almgren e Pitts, a qual pode ser aplicada em variedades fechadas (M^{n+1}, g) de dimensão qualquer para produzir hipersuperfícies mínimas, fechadas e mergulhadas, que são suave a menos de um conjunto pequeno. Neste caso, os *sweepouts* são famílias a um parâmetro de *flat chains* módulo 2 de dimensão n e sem bordo em M . Usamos $\mathcal{Z}_n(M; \mathbb{Z}_2)$ para denotar o conjunto dessas possíveis fatias. Na Seção 1, fazemos uma breve exposição sobre os objetos do espaço $\mathcal{Z}_n(M; \mathbb{Z}_2)$.

Vimos nos capítulos anteriores que a aplicação da teoria min-max está ligada a existência de um *sweepout* não homotópico a um caminho constante. No caso da teoria min-max de Almgren e Pitts, isto será possível graças ao isomorfismo de Almgren, o qual garante que

$$\pi_1(\mathcal{Z}_n(M; \mathbb{Z}_2)) \simeq H_{n+1}(M; \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2.$$

Em 1982, Shing-Tung Yau conjecturou que toda variedade Riemanniana tridimensional fechada tem infinitas superfícies mínimas imersas fechadas. Explorando a estrutura do anel de cohomologia do espaço $\mathcal{Z}_n(M; \mathbb{Z}_2)$, Codá Marques e Neves mostraram a existência de uma infinidade de hipersuperfícies mínimas fechadas e mergulhadas em variedades Riemannianas compactas de curvatura de Ricci positiva, dando uma resposta parcial à pergunta de Yau. O presente capítulo é dedicado a apresentação deste resultado.

Ao longo deste capítulo, será conveniente utilizar ciclos com coeficientes em $\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$. Além disso, usaremos espaços de parâmetros mais gerais; X subcomplexo cúbico de $I^m = [0, 1]^m$, para algum $m \in \mathbb{N}$.

Na Seção 2, descrevemos os objetos básicos das teorias de homologia e cohomologia singular e enunciamos o resultado sobre a estrutura do anel de cohomologia do espaço $\mathcal{Z}_n(M; \mathbb{Z}_2)$. Nas seções seguintes, apresentamos os elementos da prova do teorema de existência de infinitas hipersuperfícies mínimas mencionado acima, o qual será provado na Seção 6. Alguns objetos da parte mais técnica da teoria min-max de Almgren e Pitts serão omitidos a fim de apresentar as ideias envolvidas na demonstração com mais clareza. O teorema min-max geral, equivalente ao Teorema 1.9 da teoria suave, será apresentado sem demonstração na Seção 4.

1. Flat chains mod 2

Nesta seção, apresentaremos os espaços $\mathbf{I}_k(M; \mathbb{Z}_2)$ das *flat chains* módulo 2 de dimensão k , e $\mathcal{Z}_k(M; \mathbb{Z}_2)$ dos elementos $A \in \mathbf{I}_k(M; \mathbb{Z}_2)$ com $\partial A = 0$. De modo similar àquele da seção sobre varifolds, apresentamos aqui outro tipo de objeto que generaliza a ideia de subvariedades de dimensão k . No contexto da teoria min-max, trabalhar com *flat chains* tem a vantagem de que o operador de bordo permite a criação de uma teoria de homologia que garante a existência de classes de *sweepouts* não triviais. Por outro lado, trabalhar com *flat chains* tem a desvantagem de que o volume de dimensão k é apenas semi-contínuo inferiormente na topologia usual deste espaço. Por isso, a teoria usa *sweepouts* cujas fatias são *flat chains* e os limite min-max são varifolds. A fim de apresentar as *flat chains*, faremos uma breve discussão sobre a teoria de correntes no espaço Euclidiano \mathbb{R}^L .

A noção de correntes de dimensão k em \mathbb{R}^L é o análogo para k -formas diferenciais das distribuições de Schwartz para funções. Para o propósito destas notas, é útil pensar em uma corrente de dimensão k , ou simplesmente uma k -corrente, como uma subvariedade Lipschitz orientada de dimensão k .

A definição geral diz que uma k -corrente é um funcional linear contínuo no espaço $\Omega_c^k(\mathbb{R}^L)$ das k -formas diferenciais de suporte compacto em \mathbb{R}^L , o qual é equipado com a sua topologia localmente convexa usual, caracterizada pelo fato de que $\omega^i \rightarrow \omega$ se:

- em coordenadas Euclidianas, $\omega^i = \sum_{\alpha} a_{\alpha}^{(i)} dx^{\alpha}$, $\omega = \sum_{\alpha} a_{\alpha} dx^{\alpha}$, onde $dx^{\alpha} = dx^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_k}$, para cada k -upla de números naturais $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ com $\alpha_1 < \dots < \alpha_k$,
- existe $K \subset \mathbb{R}^L$ compacto tal que $\text{spt}(a_{\alpha}^{(i)})$, $\text{spt}(a_{\alpha}) \subset K$
- $\lim_{i \rightarrow \infty} D^{\beta} a_{\alpha}^{(i)} = D^{\beta} a_{\alpha}$, para todo α e todo multi-índice β .

EXEMPLO 1.1. Seja $\Sigma^k \subset \mathbb{R}^L$ uma subvariedade orientada, de dimensão k e tal que $\mathcal{H}^k(C \cap \Sigma) < \infty$ para todo compacto $C \subset \mathbb{R}^L$. Podemos considerar o funcional linear induzido por integração de k -formas em Σ : $[\Sigma](\omega) = \int_{\Sigma} \omega$, para toda $\omega \in \Omega_c^k(\mathbb{R}^L)$. $[\Sigma]$ é uma k -corrente.

A uma k -corrente qualquer em \mathbb{R}^L , associamos noções de suporte, bordo e volume de dimensão k . Seja T uma k -corrente. O suporte de T , denotado por $\text{spt}(T)$, é o menor subconjunto fechado de \mathbb{R}^L para o qual $T(\omega) = 0$, para toda $\omega \in \Omega_c^k(\mathbb{R}^L)$ suportada fora de $\text{spt}(T)$. O bordo de T é a $(k-1)$ -corrente definida por $\partial T(\omega) = T(d\omega)$, onde d denota a derivada exterior usual de formas diferenciais. Pelo Teorema de Stokes, temos que $\partial[\Sigma] = [\partial\Sigma]$, para qualquer subvariedade com bordo $\Sigma \subset \mathbb{R}^L$, como no exemplo 1.1.

A quantidade que generaliza o volume de dimensão k é chamada massa de T . Para cada aberto $W \subset \mathbb{R}^L$, definimos a massa de T em W por

$$(28) \quad \|T\|(W) = \sup\{T(\omega) : \omega \in \Omega_c^k(\mathbb{R}^L), \text{spt}(\omega) \subset W \text{ e } |\omega| \leq 1\},$$

onde $|\omega|$ é o valor máximo de $\langle \omega(x), \omega(x) \rangle^{1/2}$, para $x \in \mathbb{R}^L$. Usamos $\langle \cdot, \cdot \rangle$ para denotar as extensões do produto interno canônico de \mathbb{R}^L aos espaços

dos vetores e covetores de dimensões quaisquer; se $\{e_1, \dots, e_L\}$ é uma base ortonormal de \mathbb{R}^L e $\{e^1, \dots, e^L\}$ sua base dual, então

$$\{e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}\}_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq L}$$

é base ortonormal para o espaço dos k -vetores, e

$$\{e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}\}_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq L}$$

é base ortonormal de covetores de dimensão k . Também usamos $\langle \omega, v \rangle$ para denotar o emparelhamento natural de um k -vetor v e um k -covetor ω . A massa total da corrente T , $\|T\|(\mathbb{R}^L)$, é denotada por $\mathbf{M}(T)$.

Generalizando o exemplo 1.1, temos a seguinte definição.

DEFINIÇÃO 1.2. Uma k -corrente T é dita retificável se

$$(29) \quad T(\omega) = \int_{\Sigma} \langle \omega, \eta \rangle d\mathcal{H}^k,$$

para toda $\omega \in \Omega_c^k(\mathbb{R}^L)$, onde

- (i) $\Sigma \subset \mathbb{R}^L$ é um compacto, \mathcal{H}^k -mensurável e k -retificável (pode ser coberto por uma quantidade enumerável de cartas Lipschitz), e
- (ii) η é uma aplicação $(\mathcal{H}^k \llcorner \Sigma)$ -integrável no espaço dos k -vetores, tal que, para \mathcal{H}^k -q.t.p. $x \in \Sigma$, $\eta(x) = \tau_1 \wedge \dots \wedge \tau_k$ é simples, $|\eta(x)|$ é inteiro e o espaço tangente de Σ em x é associado a $\eta(x)$.

No caso de correntes retificáveis, o conjunto Σ em (i) coincide com o suporte de T . A função $\eta(x)/|\eta(x)|$, que associa um k -vetor simples unitário a \mathcal{H}^k -q.t.p. $x \in \Sigma$, fornece uma orientação de $T_x \Sigma$. O quantidade $|\eta(x)|$ é chamada multiplicidade de T em x . Sendo assim, a cada corrente retificável, podemos associar um varifold retificável de multiplicidade inteira; basta esquecer a orientação. Em outras palavras, associado a T , temos o varifold $|T| = \mathbf{V}(\Sigma, |\eta|)$. Lembre a notação introduzida na Seção 2.

Em seguida, consideramos um espaço um pouco maior de k -correntes. *Flat chains* inteiras em \mathbb{R}^L são k -correntes da forma $T = R + \partial S$, onde R é k -corrente retificável e S é $(k+1)$ -corrente retificável. Observe que o bordo de uma *flat chain* inteira de dimensão k é uma *flat chain* inteira de dimensão $(k-1)$. Usamos $\mathcal{F}_k(\mathbb{R}^L)$ para denotar o espaço das *flat chains* inteiras de dimensão k em \mathbb{R}^L .

Consideramos o espaço de correntes $\mathcal{F}_k(\mathbb{R}^L)$ munido da topologia *flat*, a qual é definida por meio de uma família de métricas \mathcal{F}_C , com índices $C \subset \mathbb{R}^L$ subconjuntos compactos. Fixado C e dadas $T_1, T_2 \in \mathcal{F}_k(\mathbb{R}^L)$ com suportes contidos em C , definimos a métrica *flat* por $\mathcal{F}_C(T_1 - T_2)$, onde $\mathcal{F}_C(T)$ é o ínfimo dos valores $\mathbf{M}(R) + \mathbf{M}(S)$, com $T = R + \partial S$, R k -corrente retificável e S $(k+1)$ -corrente retificável, ambas suportadas em C . Em particular, $T_i \rightarrow T$ na topologia *flat* se, e somente se, $\mathcal{F}_C(T_i, T) \rightarrow 0$ para todo compacto $C \subset \mathbb{R}^L$.

EXEMPLO 1.3. Sejam I o varifold induzido por um segmento de reta unitário em \mathbb{R}^2 e T_i uma sequência de 1-correntes dadas por bordos $T_i = \partial S_i$,

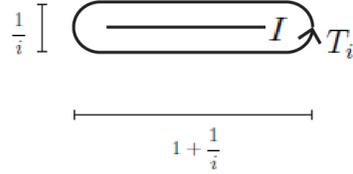


FIGURE 1. Convergência na topologia *flat* e o fenômeno do cancelamento de massa.

onde $\text{spt}(I) \subset \text{int}(\text{spt}(S_i))$, para todo i , e $\mathbf{M}(S_i) = \mathcal{H}^2(S_i) \rightarrow 0$. Veja a figura 1. Em particular, temos que $\mathcal{F}_C(T_i) \leq \mathbf{M}(S_i)$, para todo compacto $C \subset \mathbb{R}^L$ que contém os suportes das S_i . Isto mostra que T_i converge na topologia *flat* para a corrente nula.

Por outro lado, os varifolds induzidos $|T_i|$ satisfazem

$$|T_i|(\phi) = \int_{T_i} \phi(x, T_x(T_i)) d\mathcal{H}^1(x) \rightarrow 2 \int_I \phi(x, T_x I) d\mathcal{H}^1(x),$$

quando $i \rightarrow \infty$, para toda $\phi \in C_c(G_1(\mathbb{R}^2))$. Portanto, $|T_i|$ converge como varifold para $2I = \mathbf{V}(I, 2)$.

O exemplo acima ilustra o fenômeno do cancelamento de massa para uma sequência de correntes que converge na topologia *flat*. Em geral, a massa é apenas semi-contínua inferiormente nesta topologia; i.e., se $\mathcal{F}(T_i, T) \rightarrow 0$, então para todo aberto W temos $\|T\|(W) \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \|T_i\|(W)$.

A fim de introduzir as *flat chains* módulo 2, consideramos a seguinte variante da métrica *flat* \mathcal{F}_C . Para cada $T \in \mathcal{F}_k(\mathbb{R}^L)$ suportada em C , defina

$$(30) \quad \mathcal{F}_C^2(T) = \inf_{R, S, Q} \{\mathbf{M}(R) + \mathbf{M}(S) : T = R + \partial S + 2Q\},$$

onde R e S são correntes retificáveis de dimensões apropriadas e $Q \in \mathcal{F}_k(\mathbb{R}^L)$, todas suportadas em C . Com isto, estamos forçando $\mathcal{F}_C^2(2T) = 0$, para toda $T \in \mathcal{F}_k(\mathbb{R}^L)$ com $\text{spt}(T) \subset C$.

DEFINIÇÃO 1.4. Sejam T_1 e T_2 *flat chains* inteiras. Dizemos que T_1 e T_2 são congruentes módulo 2, e escrevemos $T_1 \equiv T_2 \pmod{2}$, se $\mathcal{F}_C^2(T_1 - T_2) = 0$, para algum subconjunto compacto $C \subset \mathbb{R}^L$.

As classes de equivalência de elementos de $\mathcal{F}_k(\mathbb{R}^L)$ são chamadas *flat chains* módulo 2 de dimensão k em \mathbb{R}^L .

Como no caso de correntes, *flat chains* módulo 2 também admitem noções de suporte, bordo e massa. Definimos o suporte $\text{spt}^2(T)$ de uma *flat chain* mod 2 como sendo

$$\text{spt}^2(T) = \bigcap \{\text{spt}(R) : R \equiv T \pmod{2}\}.$$

Observe que se $T_1 \equiv T_2 \pmod{2}$, então $\partial T_1 \equiv \partial T_2 \pmod{2}$. Isto pode ser visto como uma consequência imediata do fato de que $\mathcal{F}(\partial T) \leq \mathcal{F}(T)$.

Definimos o bordo de uma *flat chain* mod 2, T , como a classe de congruência mod 2, ∂T , de qualquer *flat chain* inteira que represente T .

Toda corrente retificável R pode ser expressa como uma soma $\tilde{R} + 2Q$, onde \tilde{R} e Q são correntes retificáveis e \tilde{R} tem multiplicidade 1 em quase todo ponto do seu suporte. Neste caso, a massa da *flat chain* mod 2 associada a R , denotada por $\mathbf{M}^2(R)$, será a massa da corrente \tilde{R} . Em geral, a massa de uma *flat chain* mod 2, T , é o menor valor $\mathbf{M}^2(T)$ para o qual é possível aproximar T , com respeito a \mathcal{F}^2 , por correntes retificáveis com massas tendendo a $\mathbf{M}^2(T)$. Mais precisamente, para todo $\varepsilon > 0$, existem $C \subset \mathbb{R}^L$ compacto e R corrente retificável suportada em C com

$$\mathcal{F}_C^2(T - R) < \varepsilon \text{ e } \mathbf{M}(R) < \mathbf{M}^2(T) + \varepsilon.$$

Se M^{n+1} é uma variedade Riemanniana compacta e orientada, consideramos M isometricamente mergulhada em algum espaço Euclidiano \mathbb{R}^L . Então, usamos $\mathbf{I}_k(M; \mathbb{Z}_2)$ para denotar o espaço das *flat chains* mod 2 de dimensão k de \mathbb{R}^L com suporte contido em M . Denotamos por $\mathcal{Z}_k(M; \mathbb{Z}_2)$ o espaço das *flat chains* mod 2 $T \in \mathbf{I}_k(M; \mathbb{Z}_2)$ com $\partial T = 0$.

Fixe $C \subset \mathbb{R}^L$ compacto tal que M está contida no interior de C . Usamos \mathcal{F}^2 para denotar a métrica *flat* \mathcal{F}_C^2 . Assumimos ao longo dessas notas que os espaços $\mathbf{I}_k(M; \mathbb{Z}_2)$ e $\mathcal{Z}_k(M; \mathbb{Z}_2)$ têm a topologia induzida por \mathcal{F}^2 .

Já vimos como associar um varifold inteiro a cada k -corrente retificável com suporte em M . Em seguida, consideramos varifolds induzidos por *flat chains* mod 2. Dada $T \in \mathbf{I}_k(M; \mathbb{Z}_2)$ de massa finita, consideramos sequência R_i de correntes retificáveis que aproximam T em \mathcal{F}^2 , e tais que $\mathbf{M}(R_i) \rightarrow \mathbf{M}^2(T)$. A menos de subsequência, $\int |R_i|$ converge como varifold. O limite só depende de T e será denotado por $|T|$. A massa de $|T|$ é igual a $\mathbf{M}^2(T)$.

Na Seção 2 do Capítulo 1, demos sentido à imagem de um varifold por uma aplicação. De modo análogo, podemos considerar imagens de correntes retificáveis e *flat chains* módulo 2. Seja $\Psi : M \rightarrow M$ uma aplicação de classe C^1 . No caso de uma corrente retificável T , como na Definição 1.2, definimos $\Psi_{\#}T$ como a corrente retificável

$$\Psi_{\#}T(\omega) = \int_{\Psi(\Sigma)} \langle \omega(y), \tilde{\eta}(y) \rangle d\mathcal{H}^k(y),$$

onde

$$\tilde{\eta}(y) = \sum_{x \in \Psi^{-1}(y) \cap \Sigma_+} d\Psi_x(\eta(x)),$$

e Σ_+ denota o subconjunto de Σ onde o determinante Jacobiano da diferencial $d\Psi_x$ restrita a $T_x\Sigma$ é positivo. Observe que, em todo $y \in \Psi(\Sigma)$ onde $T_y\Psi(\Sigma)$ existe, cada parcela de $\tilde{\eta}(y)$ é um múltiplo inteiro, possivelmente negativo, de um k -vetor simples e unitário associado a $T_y\Psi(\Sigma)$.

De modo análogo, podemos definir a imagem de uma *flat chain* inteira $T = R + \partial S$ pela aplicação Ψ por $\Psi_{\#}T = \Psi_{\#}R + \partial(\Psi_{\#}S)$. Observe que estas definições também fazem sentido se Ψ é apenas Lipschitz. Além disso,

$$\mathcal{F}^2(\Psi_{\#}T) \leq \max\{\text{Lip}(\Psi)^k, \text{Lip}(\Psi)^{k+1}\} \mathcal{F}^2(T).$$

Portanto, se $T_1 \equiv T_2 \pmod{2}$, então $\Psi_{\#}T_1 \equiv \Psi_{\#}T_2 \pmod{2}$. Isto nos permite fazer a seguinte definição: a imagem de uma flat chain mod 2, T , pela aplicação Ψ é a classe de congruência mod 2, $\Psi_{\#}T$, de qualquer flat chain inteira em T .

2. Topologia do espaço $\mathcal{Z}_n(M; \mathbb{Z}_2)$

Nesta seção, apresentamos duas propriedades topológicas do espaço das *flat chains* mod 2, $\mathcal{Z}_n(M; \mathbb{Z}_2)$. A primeira, Lema 2.1, é uma propriedade das bolas de raio suficientemente pequenos na métrica *flat*. A segunda é o Teorema 2.2, que descreve o anel de cohomologia de $\mathcal{Z}_n(M; \mathbb{Z}_2)$.

LEMA 2.1. *Existe $\varepsilon = \varepsilon(M) > 0$ tal que toda aplicação contínua na topologia flat $\Psi : S^1 \rightarrow \mathcal{Z}_n(M; \mathbb{Z}_2)$ com imagem contida em uma bola de raio ε é homotopicamente trivial.*

A homotopia entre uma aplicação contínua do círculo S^1 com imagem em uma bola de raio ε e uma aplicação constante pode ser considerada como sendo suportada em uma bola concêntrica um pouco maior que a original; de raio $\eta\varepsilon$, onde $\eta = \eta(M)$ também é uma constante que só depende de M . A prova deste lema será omitida nestas notas, ela utiliza resultados de interpolação entre correntes próximas na topologia *flat*, Teorema 6.6 em [2] e Teorema 14.1 em [17] para a versão deste resultado para aplicações contínuas na topologia da massa.

Em seguida, faremos uma breve introdução aos grupos de homologia e cohomologia. Seja X um espaço topológico. Usamos Δ^m para denotar o m -simplexo padrão; o fecho convexo do conjunto $\{e_0, e_1, \dots, e_m\}$ dos vetores da base canônica do \mathbb{R}^{m+1} . Se $m = 0$, Δ^0 contém um único ponto. Existem m faces de dimensão $(m-1)$ em Δ^m , usamos $[e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_m]$ para denotar a face correspondente ao fecho convexo do conjunto $\{e_0, \dots, e_m\} \setminus \{e_i\}$.

Seja $C_m(X)$ o grupo abeliano livre gerado pelas aplicações contínuas $\sigma : \Delta^m \rightarrow X$. Estas aplicações são chamadas de n -simplexos singulares. Cada elemento de $C_m(X)$ pode ser escrito como $c_m = \sum_{i=1}^{\ell} n_i \sigma_i$, onde $n_i \in \mathbb{Z}$ e σ_i é m -simplexo singular.

A restrição de um m -simplexo a cada uma das faces que compõem o bordo de Δ^m induz um $(m-1)$ -simplexo. Esta observação pode ser usada para definir o operador de bordo $\partial : C_m(X) \rightarrow C_{m-1}(X)$ pela expressão

$$\partial\sigma = \sum_{i=1}^m (-1)^i \sigma|_{[e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_m]},$$

para cada m -simplexo. Este operador é um homomorfismo de grupos e satisfaz a propriedade básica $\partial \circ \partial = 0$.

Em seguida, consideramos dois subgrupos especiais de $C_m(X)$, os ciclos

$$Z_m(X) = \{c \in C_m(X) : \partial c = 0\},$$

e os bordos

$$B_m(X) = \{c_m \in C_m(X) : c_m = \partial c_{m+1}, \text{ para algum } c_{m+1} \in C_{m+1}(X)\}.$$

Pela propriedade básica do operador de bordo, temos que $B_m(X)$ é subgrupo de $Z_m(X)$. Os grupos quociente $H_m(X) = Z_m(X)/B_m(X)$ são chamados grupos de homologia de X .

Toda aplicação contínua $f : X \rightarrow X'$ induz o homomorfismo $f_\# : C_m(X) \rightarrow C_m(X')$ definido por composição

$$f_\# \left(\sum_{i=1}^{\ell} n_i \sigma_i \right) = \sum_{i=1}^{\ell} n_i (f \circ \sigma_i).$$

Observamos que $f_\#$ comuta com o operador de bordo, $f_\# \circ \partial = \partial \circ f_\#$. Em particular, concluímos que $f_\#(B_m(X)) \subset B_m(X')$ e $f_\#(Z_m(X)) \subset Z_m(X')$. Portanto, toda aplicação contínua f induz um homomorfismo entre os grupos de homologia $f_* : H_m(X) \rightarrow H_m(X')$. É um fato importante na teoria de homologia que tal aplicação é invariante por homotopia; i.e., se $f, g : X \rightarrow X'$ são homotópicas, então $f_* = g_*$.

Em seguida, apresentamos alguns elementos da teoria de cohomologia com coeficientes em \mathbb{Z}_2 , a qual funciona como a dualização da teoria de homologia.

Usamos $C^m(X, \mathbb{Z}_2)$ para denotar o grupo abeliano livre gerado pelos homomorfismo $c^m : C_m(X) \rightarrow \mathbb{Z}_2$. Substituímos o operador de bordo em cada grau pelo seu dual $\delta : C^m(X; \mathbb{Z}_2) \rightarrow C^{m+1}(X; \mathbb{Z}_2)$; i.e.,

$$\delta c^m(c_{m+1}) = c^m(\partial c_{m+1}).$$

É imediato verificar que $\delta \circ \delta = 0$, o que nos permite considerar o quociente $H^m(X, \mathbb{Z}_2)$ do grupo de cociclos $Z^m(X, \mathbb{Z}_2) = \{c \in C^m(X; \mathbb{Z}_2) : \delta c = 0\}$, pelo subgrupo dos bordos $B^m(X, \mathbb{Z}_2) = \delta(C^{m+1}(X, \mathbb{Z}_2))$. Além disso, para toda aplicação contínua $f : X \rightarrow X'$, o homomorfismo induzida $f_\#$ pode dualizado para $f^\# : C^m(X'; \mathbb{Z}_2) \rightarrow C^m(X; \mathbb{Z}_2)$ por $f^\#(c^m)(c_m) = c^m(f_\#(c_m))$. Usando a comutatividade desta aplicação com o operador de cobordo, vemos que ela induz um homomorfismo no nível de cohomologia.

O último ingrediente que precisamos introduzir para dar a descrição topológica de $\mathcal{Z}_n(M; \mathbb{Z}_2)$ é o produto *cup*, o qual induz uma estrutura de anel graduado na união dos grupos de cohomologia. Dados $\alpha \in C^p(X, \mathbb{Z}_2)$ e $\beta \in C^q(X, \mathbb{Z}_2)$, definimos o produto *cup* entre α e β como sendo o elemento $\alpha \smile \beta \in C^{p+q}(X, \mathbb{Z}_2)$ definido por

$$(\alpha \smile \beta) \left(\sum_{i=1}^{\ell} n_i \sigma_i \right) = \sum_{i=1}^{\ell} n_i \alpha(\sigma_i|_{[e_0, \dots, e_p]}) \beta(\sigma_i|_{[e_p, \dots, e_{p+q}]}) \pmod{2}.$$

Este produto relaciona-se com o operador de cobordo definido anteriormente via $\delta(\alpha \smile \beta) = (\delta\alpha) \smile \beta + (-1)^p \alpha \smile (\delta\beta)$. Em particular, segue-se que se α e β são cociclos, então o produto entre eles é um novo cociclo. Além disso, se α é cociclo, então $\delta(\alpha \smile \beta) = (-1)^p \alpha \smile (\delta\beta)$, o que mostra que o produto entre um cociclo e um cobordo é um novo cobordo. O mesmo ocorre na ordem inversa. Com isto, concluímos que o produto *cup* pode ser passado ao nível de cohomologia $H^p(X, \mathbb{Z}_2) \times H^q(X, \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\smile} H^{p+q}(X, \mathbb{Z}_2)$.

TEOREMA 2.2. *O anel de cohomologia de $\mathcal{Z}_n(M; \mathbb{Z}_2)$ com coeficientes em \mathbb{Z}_2 tem único gerador $\bar{\lambda} \in H^1(\mathcal{Z}_n(M; \mathbb{Z}_2), \mathbb{Z}_2)$, e o produto cup $\bar{\lambda}^p$ de p cópias de $\bar{\lambda}$ é não nulo em $H^p(\mathcal{Z}_n(M; \mathbb{Z}_2), \mathbb{Z}_2)$, para todo $p \geq 1$.*

A prova deste resultado não será apresentada nestas notas. Ela é baseada no isomorfismo encontrado por Almgren [2] entre o grupo $\pi_\ell(\mathcal{Z}_k(M; \mathbb{Z}_2))$ e o grupo de homologia $H_{k+\ell}(M, \mathbb{Z}_2)$.

Na prova do principal resultado deste capítulo, Teorema 6.1, usamos a seguinte propriedade fundamental do produto cup.

PROPOSIÇÃO 2.3. *Sejam $\alpha \in H^p(X; \mathbb{Z}_2)$ e $\beta \in H^q(X; \mathbb{Z}_2)$ classes de cohomologia e A e B subconjuntos de X . Sejam i_A, i_B e $i_{A \cup B}$ as aplicações de inclusão de A, B e $A \cup B$ em X , respectivamente.*

Com isto, temos que se $(i_A)^\alpha = 0$ em $H^p(A; \mathbb{Z}_2)$ e $(i_B)^*\beta = 0$ em $H^q(B; \mathbb{Z}_2)$, então $(i_{A \cup B})^*(\alpha \smile \beta) = 0$ em $H^{p+q}(A \cup B; \mathbb{Z}_2)$.*

Para finalizar a seção, apresentamos o esboço da prova deste fato. Dizer que $(i_A)^*\alpha = 0$ significa que um representante $c^p : C_p(X) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ da classe α satisfaz $c^p(\sigma)$, para todo $\sigma \in C_p(A)$. Logo, se $c^p \in \alpha$ e $d^q \in \beta$, segue-se que $c \smile d : C_{p+q}(X) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ é nulo em toda combinação de $(p+q)$ -simplexos suportados em um dos subconjuntos A ou B . Intuitivamente, como A e B são abertos, todo simplexo com imagem em $A \cup B$ pode ser subdividido em parcelas com imagens contidas em um dos subconjuntos. Portanto, o produto $c \smile d$ é nulo em $C_{p+q}(A \cup B)$.

3. *p-sweepouts*

Nesta seção, generalizamos a noção de *sweepouts* a aplicações definidas em espaços de parâmetros de dimensão qualquer que detectam diferentes classes topológicas em $\mathcal{Z}_n(M; \mathbb{Z}_2)$. Os elementos dessas classes mais gerais são chamados *p-sweepouts*.

Usamos $I^m = [0, 1]^m$ para denotar o complexo cúbico formado por todas as células da forma $\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_m$, com $\alpha_i \in \{[0], [1], [0, 1]\}$. Um subcomplexo cúbico X de I^m é um subconjunto dessas células com a propriedade que se uma célula $\alpha \in X$, então todas as faces de α também pertencem a X . Para esta exposição, X pode ser pensado como um subconjunto de I^m .

Intuitivamente, podemos pensar em um *p-sweepout* como uma aplicação contínua $\Phi : X \rightarrow \mathcal{Z}_n(M; \mathbb{Z}_2)$ definida em um subcomplexo cúbico de I^m , para algum m , e com a propriedade de que para todo $\{x_1, \dots, x_p\} \subset M$, existe $\theta \in X$ tal que $\{x_1, \dots, x_p\} \subset \Phi(\theta)$.

EXEMPLO 3.1. Vimos anteriormente que o caminho de hipersuperfícies formado pelos níveis de uma função de Morse compõe um *sweepout*. Em geral, também podemos usar uma função de Morse para construir *p-sweepouts*; cada fatia será representada por uma união de no máximo p níveis da função.

Mais precisamente, seja $f : M^{n+1} \rightarrow [0, 1]$ uma função de Morse. Para cada $(a_0, a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$, considere o n -ciclo mod 2 $\Phi(a_0, a_1, \dots, a_p)$

associado à *flat chain* inteira

$$(31) \quad \partial\{x \in M : a_0 + a_1f(x) + \dots + a_pf(x)^p < 0\}.$$

Observe que $\Phi(a_0, a_1, \dots, a_p) = \Phi(\alpha a_0, \alpha a_1, \dots, \alpha a_p)$, para todo número real $\alpha \neq 0$. Logo, Φ é uma família de ciclos parametrizada pelo espaço projetivo real $\mathbb{RP}^p = \mathbb{R}^{p+1}/(a \sim \alpha a)$. Usamos $[a_0 : a_1 : \dots : a_p]$ para denotar o elemento de \mathbb{RP}^p correspondente a $a = (a_0, a_1, \dots, a_p)$.

Observe ainda que o suporte de $\Phi([a_0 : a_1 : \dots : a_p])$ está contido em até p níveis de f . De fato, temos

$$\text{spt } \Phi([a_0 : a_1 : \dots : a_p]) \subset \cup_{i=1}^p \{f = c_i\},$$

onde $c_i, i = 1, \dots, p$, são as raízes do polinômio $P(c) = a_0 + a_1c + \dots + a_pc^p$. No entanto, pode ser que nem todos os níveis $\{f = c_i\}$ estejam presentes naquele suporte. Se c_i é uma raiz de multiplicidade par de $P(c)$, então os valores assumidos por P têm todos o mesmo sinal para todo $c \neq c_i$ próximo de c_i . Caso tenhamos $P(c) > 0$, então é claro que $\{f = c_i\}$ não está no bordo da região em que $P(f(x)) < 0$. Já se $P(c) < 0$, o nível c_i de f aparece duas vezes no bordo acima: como bordo de $\{f < c_i\}$ e como bordo de $\{f > c_i\}$. As orientações induzidas em $\{f = c_i\}$ por estas duas regiões são opostas, logo este nível não aparece no suporte da corrente expressa em (31). Portanto, o nível $\{f = c_i\}$ não aparece no suporte de $\Phi([a_0 : a_1 : \dots : a_p])$.

A definição intuitiva de *p-sweepout* pode ser verificada facilmente; dado $\{x_1, \dots, x_p\} \subset M$, considere um polinômio $a_0 + a_1c + \dots + a_pc^p$ cuja raízes são os valores $f(x_i)$. Sendo assim, segue-se que $\Phi([a_0 : a_1 : \dots : a_p])$ passa pelos p pontos x_1, \dots, x_p .

A fim de introduzir a noção formal de *p-sweepout* usaremos o gerador $\bar{\lambda} \in H^1(\mathcal{Z}_n(M; \mathbb{Z}_2), \mathbb{Z}_2)$ do anel de cohomologia de $\mathcal{Z}_n(M; \mathbb{Z}_2)$. Lembre-se que a noção de *sweepout* é a de um caminho $\gamma : S^1 \rightarrow \mathcal{Z}_n(M; \mathbb{Z}_2)$ que não é homotópico a uma aplicação constante.

O isomorfismo de Almgren nos diz que $\pi_1(\mathcal{Z}_n(M; \mathbb{Z}_2)) = \mathbb{Z}_2$. Logo, existem apenas duas classes de homotopia de curvas $\gamma : S^1 \rightarrow \mathcal{Z}_n(M; \mathbb{Z}_2)$. Cada classe de homotopia $[\gamma]$, corresponde a uma única classe em $H_1(\mathcal{Z}_n(M; \mathbb{Z}_2))$; toda curva pode ser vista como um 1-simplexo singular. Além disso, o homomorfismo de grupos assim definido $\pi_1(\mathcal{Z}_n(M; \mathbb{Z}_2)) \rightarrow H_1(\mathcal{Z}_n(M; \mathbb{Z}_2))$, é sobrejetivo e tem núcleo igual ao subgrupo dos comutadores. Como neste caso o grupo fundamental é isomorfo a \mathbb{Z}_2 , que é abeliano, concluímos que a aplicação acima é um isomorfismo.

O grupo de cohomologia $H^1(X, \mathbb{Z}_2)$, de um espaço topológico X , está relacionado com o grupo $\text{Hom}(H_1(X), \mathbb{Z}_2)$ dos homomorfismos do grupo $H_1(X)$ em \mathbb{Z}_2 via um homomorfismo

$$(32) \quad h : H^1(X, \mathbb{Z}_2) \rightarrow \text{Hom}(H_1(X), \mathbb{Z}_2).$$

Toda $[\varphi] \in H^1(X, \mathbb{Z}_2)$ é a classe de um homomorfismo φ das cadeias $C_1(X)$ em \mathbb{Z}_2 , com $\delta\varphi = 0$. Em particular, φ é zero nos bordos $B_1(X) \subset C_1(X)$, o que implica que a restrição de φ aos ciclos $Z_1(X) \subset C_1(X)$ pode ser passada

ao quociente $H_1(X) = Z_1(X)/B_1(X)$. Obtemos assim o homomorfismo $h([\varphi]) : H_1(X) \rightarrow \mathbb{Z}_2$. Esta construção não é particular dos grupos de cohomologia de grau 1, mas, neste caso, o fato de que o grupo de homologia $H_0(X)$ é livre implica que h é isomorfismo. Para mais detalhes, ver o teorema dos coeficientes universais, Teorema 3.2 de [14]. Além disso, a aplicação h é natural, no sentido que dada uma aplicação contínua $\gamma : X \rightarrow X'$, o diagrama abaixo é comutativo

$$\begin{array}{ccc} H^1(X', \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{h} & \text{Hom}(H_1(X'), \mathbb{Z}_2) \\ \downarrow \gamma^* & & \downarrow (\gamma_*)^* \\ H^1(X, \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{h} & \text{Hom}(H_1(X), \mathbb{Z}_2) \end{array}$$

Se $\gamma : S^1 \rightarrow \mathcal{Z}_n(M; \mathbb{Z}_2)$ é um caminho qualquer, a naturalidade de h fornece o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} H^1(\mathcal{Z}_n(M; \mathbb{Z}_2), \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{h} & \text{Hom}(H_1(\mathcal{Z}_n(M; \mathbb{Z}_2)), \mathbb{Z}_2) \\ \downarrow \gamma^* & & \downarrow (\gamma_*)^* \\ H^1(S^1, \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{h} & \text{Hom}(H_1(S^1), \mathbb{Z}_2) \end{array}$$

em que todos os grupos representados são isomorfos a \mathbb{Z}_2 e os dois homomorfismos h são isomorfismos. Sendo assim, γ é não trivial homotopicamente se, e somente se, γ_* é a aplicação que leva a identidade de $H_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$ na identidade de $H_1(\mathcal{Z}_n(M; \mathbb{Z}_2))$. Portanto, usando a comutatividade do diagrama, concluímos que as seguintes afirmações são equivalentes: γ é um *sweepout* (não trivial homotopicamente), $\gamma^*(\bar{\lambda}) \neq 0$, e $\bar{\lambda}(\gamma) \neq 0$.

DEFINIÇÃO 3.2. Seja X um subcomplexo cúbico de I^m , para algum $m \in \mathbb{N}$. Uma aplicação contínua na topologia *flat* $\Phi : X \rightarrow \mathcal{Z}_n(M; \mathbb{Z}_2)$ é um *p-sweepout* se $\Phi^*(\bar{\lambda}^p) \neq 0$.

A seguinte proposição pode ajudar na verificação de que uma aplicação contínua $\Phi : X \rightarrow \mathcal{Z}_n(M; \mathbb{Z}_2)$ é um *p-sweepout*.

PROPOSIÇÃO 3.3. A aplicação contínua $\Phi : X \rightarrow \mathcal{Z}_n(M; \mathbb{Z}_2)$ é um *p-sweepout* se, e somente se, houver $\lambda \in H^1(X; \mathbb{Z}_2)$ tal que:

- (i) para um caminho qualquer $\sigma : S^1 \rightarrow X$, temos que $\lambda(\sigma) \neq 0$ se, e somente se, $\Phi \circ \sigma$ é um *sweepout*, e
- (ii) $\lambda^p \neq 0$ em $H^p(X; \mathbb{Z}_2)$.

PROVA. Observe que a condição (i) implica que $\lambda(\sigma) \neq 0$ se, e somente se, $\Phi^*(\bar{\lambda})(\sigma) = \bar{\lambda}(\Phi \circ \sigma) \neq 0$. Nesta equivalência, estamos usando $\Phi^*(\bar{\lambda})$ identificada com sua imagem via o isomorfismo h descrito anteriormente. Em particular, como λ e $\Phi^*(\bar{\lambda})$ assumem valores em \mathbb{Z}_2 , (i) equivale ao fato de que $\lambda = \Phi^*(\bar{\lambda})$.

Portanto, se Φ é um p -sweepout, é imediato que $\lambda = \Phi^*(\bar{\lambda})$ satisfaz as propriedades (i) e (ii). Reciprocamente, se $\lambda \in H^1(X; \mathbb{Z}_2)$ satisfaz (i) e (ii), então $\lambda = \Phi^*(\bar{\lambda})$ é consequência de (i). Aplicando (ii), $\Phi^*(\bar{\lambda}^p) = \lambda^p \neq 0$. \square

EXEMPLO 3.4. Vamos verificar que a aplicação

$$\Phi : \mathbb{R}\mathbb{P}^p \rightarrow \mathcal{Z}_n(M; \mathbb{Z}_2)$$

construída no exemplo anterior a partir de uma função de Morse f em M^{n+1} é um p -sweepout. Para tanto, usaremos a Proposição 3.3. Seja $\lambda \in H^1(\mathbb{R}\mathbb{P}^p; \mathbb{Z}_2)$ o gerador do anel de cohomologia de $\mathbb{R}\mathbb{P}^p$. Conhecido o anel de cohomologia de $\mathbb{R}\mathbb{P}^p$, verifica-se que $\lambda^p \neq 0$; logo, a condição (ii) daquela proposição é satisfeita.

De modo análogo à observação feita para $\bar{\lambda}$, dada $\sigma : S^1 \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^p$, sabemos que $\lambda(\sigma) \neq 0$ se, e somente se, σ não é homotopicamente trivial em $\mathbb{R}\mathbb{P}^p$. Logo, a fim de verificar a propriedade (i), é suficiente verificar que se um caminho $\sigma : S^1 \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^p$ não é homotopicamente trivial, então $\Phi \circ \sigma$ é um sweepout. De fato, como só existem duas classes de homotopia e σ não é trivial, então σ é homotópica ao caminho $\sigma_0 : S^1 \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^p$ definido por

$$\sigma_0(\cos \theta, \sin \theta) = [\cos(\theta/2) : \sin(\theta/2) : 0 : \dots : 0],$$

para $\theta \in [0, 2\pi]$. Em particular, $\Phi \circ \sigma$ é homotópica a

$$\Phi \circ \sigma_0(\cos \theta, \sin \theta) = \partial\{f(x) < -\cot(\theta/2)\},$$

o qual é o sweepout induzido pelos níveis da função de Morse f . Donde concluímos que $\Phi \circ \sigma$ é um sweepout.

4. p -width

Nesta seção, introduzimos o conceito de p -width e apresentamos o teorema de existência de hipersuperfícies min-max associado.

Usamos \mathcal{P}_p para denotar o espaço dos p -sweepouts $\Phi : X \rightarrow \mathcal{Z}_n(M; \mathbb{Z}_2)$, para algum subcomplexo cúbico X de I^m , para algum $m \in \mathbb{N}$. Duas aplicações em \mathcal{P}_p podem ter domínios diferentes. A seguir, apresentamos a noção de p -width estudada por Gromov, Guth, Codá Marques e Neves, dentre outros autores.

DEFINIÇÃO 4.1. A p -width de M^{n+1} é definida por

$$\omega_p(M) = \inf_{\Phi \in \mathcal{P}_p} \sup\{\mathbf{M}(\Phi(x)) : x \in \text{dmn}(\Phi)\},$$

onde $\text{dmn}(\Phi)$ denota o domínio do p -sweepout Φ .

É imediato verificar que se Φ é um p -sweepout, então Φ é um q -sweepout para todo $q \leq p$. Em particular, temos

$$\omega_1(M) \leq \omega_2(M) \leq \dots \leq \omega_p(M) \leq \omega_{p+1}(M) \leq \dots$$

Similarmente ao caso de sweepouts a um parâmetro, o teorema min-max pode ser aplicado para cada classe de homotopia de p -sweepouts. Decomponos \mathcal{P}_p em classes de homotopia Π e usamos \mathcal{D}_p para denotar o espaço

dessas classes; cada $\Pi \in \mathcal{D}_p$ é um conjunto de p -sweepouts definidos no mesmo domínio $X = X(\Pi)$ e que são dois a dois homotópicos. Seguindo esta terminologia, temos a seguinte versão do teorema min-max:

TEOREMA 4.2. *Sejam M^{n+1} uma variedade Riemanniana compacta de dimensão $n+1$, com $2 \leq n \leq 6$, e $\Pi \in \mathcal{D}_p$ uma classe de p -sweepouts de M .*

Existe um varifold estacionário Σ cujo suporte é uma hipersuperfície mínima suave, mergulhada e fechada, possivelmente desconexa e com multiplicidades, e tal que

$$\|\Sigma\|(M) = \mathbf{L}(\Pi) = \inf_{\Phi \in \Pi} \sup \{ \mathbf{M}(\Phi(x)) : x \in \text{dmn}(\Phi) \}.$$

Este teorema foi provado por Pitts, dando continuidade ao trabalho de Almgren, em dimensões $n = 2, 3, 4, 5$. Nestes casos, a afirmação sobre a regularidade do varifold min-max Σ é baseada nas estimativas de curvatura de Schoen, Simon e Yau [29] para hipersuperfícies mínimas estáveis. As estimativas de curvatura obtidas por Schoen e Simon [28] permitiram a extensão do teorema para $n \geq 6$. No caso $n = 6$, como no enunciado acima, o suporte do limite min-max ainda é suave. Em dimensões $n > 7$, a afirmação sobre a regularidade é que o conjunto singular do suporte de Σ tem codimensão de Hausdorff pelo menos 7.

Observe que o teorema min-max diz que a *width* de cada classe $\Pi \in \mathcal{D}_p$ pode ser realizada como o volume n -dimensional com multiplicidades de um varifold estacionário, mas não é aplicado à p -width diretamente. Por outro lado, temos:

$$\omega_p(M) = \inf_{\Pi \in \mathcal{D}_p} \mathbf{L}(\Pi).$$

EXEMPLO 4.3. Seja S^3 a esfera Euclideana tridimensional. Temos:

$$\omega_1(S^3) = \omega_2(S^3) = \omega_3(S^3) = \omega_4(S^3) = 4\pi.$$

Pela relação de monotonicidade das p -widths, é suficiente mostrar que $4\pi \leq \omega_1(S^3)$ e $\omega_4(S^3) \leq 4\pi$. Com relação à primeira afirmação, a menos de uma aplicação do teorema min-max, basta provar que toda superfície mínima fechada $\Sigma \subset S^3$ tem área $\mathcal{H}^2(\Sigma) \geq 4\pi$. Para tanto, observamos que o cone sobre Σ em \mathbb{R}^4 , $C(\Sigma) = \{\lambda x : x \in \Sigma \text{ e } \lambda \geq 0\}$, é um cone Euclideano estacionário. Além disso, para todo $R > 0$, temos

$$\frac{\mathcal{H}^3(C(\Sigma) \cap B_R)}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{\mathcal{H}^2(\Sigma)}{4\pi},$$

onde B_R denota a bola Euclideana de raio R centrada na origem de \mathbb{R}^4 . A fim de concluir este argumento, usaremos o seguinte fato: para todo $p \in C(\Sigma)$ o limite

$$\Theta(C(\Sigma), \infty, p) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{H}^3(C(\Sigma) \cap B_R(p))}{\frac{4}{3}\pi R^3},$$

existe e é independente de p . A existência é uma consequência da fórmula de monotonicidade discutida na Seção 4 do Capítulo 3. O valor $\Theta(C(\Sigma), \infty) =$

$\Theta(C(\Sigma), \infty, p)$ é chamado de densidade de $C(\Sigma)$ no infinito. Usando p igual à origem de \mathbb{R}^4 , temos que $\Theta(C(\Sigma), \infty) = \mathcal{H}^2(\Sigma)/4\pi$. Por outro lado, se escolhermos $p \in C(\Sigma)$ diferente da origem, a fórmula de monotonicidade implica que $\Theta(C(\Sigma), \infty) \geq \Theta(p, C(\Sigma)) = 1$. Logo, $\mathcal{H}^2(\Sigma) \geq 4\pi$.

Para provar a desigualdade $\omega_4(S^3) \leq 4\pi$, basta construir um 4-*sweepout* Φ com $\mathbf{M}(\Phi(x)) \leq 4\pi$, para todo $x \in \text{dmn}(\Phi)$. Considere a aplicação $\varphi : S^4 \rightarrow \mathcal{Z}_2(S^3; \mathbb{Z}_2)$ definida por

$$\varphi(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) = \{x \in S^3 : \langle x, (a_0, a_1, a_2, a_3) \rangle = a_4 | |(a_0, a_1, a_2, a_3)| |\},$$

para todo $a_4^2 \neq 1$, e por zero nos pólos $(0, 0, 0, 0, 1)$ e $(0, 0, 0, 0, -1)$. Esta aplicação é contínua na topologia *flat* e satisfaz $\varphi(a) = \varphi(-a)$, para todo $a \in S^4$. Seja $\Phi : \mathbb{R}\mathbb{P}^4 \rightarrow \mathcal{Z}_2(S^3; \mathbb{Z}_2)$ a aplicação contínua definida como a passagem de φ ao quociente. Além disso, toda fatia $\Phi([a])$ é uma esfera geodésica redonda, em particular, com $\mathbf{M}(\Phi([a])) \leq 4\pi$.

Resta mostrar apenas que Φ é um 4-*sweepout*. A prova deste fato é análoga àquela do exemplo 3.4, usando a Proposição 3.3. Seja $\lambda \in H^1(\mathbb{R}\mathbb{P}^4; \mathbb{Z}_2)$ o gerador do anel de cohomologia. É claro que $\lambda^4 \neq 0$, o que garante a propriedade (ii) daquela proposição. A fim de concluir a prova, é suficiente verificar que a composição de Φ com um caminho não trivial $\sigma : S^1 \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^4$ é um *sweepout*. Tome σ definido por

$$\sigma(\theta) = [0 : 0 : 0 : \cos(\theta/2) : \sin(\theta/2)],$$

para todo $\theta \in [-\pi, \pi]$. Observando que $(\Phi \circ \sigma)(\theta) = \{x \in S^3 : x_4 = \sin(\theta/2)\}$ é o *sweepout* canônico, o argumento está concluído.

5. Estimativas das p -widths

O objetivo desta seção é apresentar estimativas superiores e inferiores para as p -widths de M . Tais estimativas foram obtidas por Gromov [11] e Guth [13]. Nestas notas, omitimos a prova das estimativas inferiores, as quais não são usadas no argumento da seção seguinte.

TEOREMA 5.1. *Seja M^{n+1} uma variedade Riemanniana compacta. Existe uma constante $C(M) > 0$ tal que, para todo $p \in \mathbb{N}$,*

$$C^{-1}p^{\frac{1}{n+1}} \leq \omega_p(M) \leq Cp^{\frac{1}{n+1}}.$$

PROVA. Parte 1: Escolha uma cubicação de M ; i.e., um subcomplexo cúbico K de dimensão $(n+1)$ de I^m , para algum $m \in \mathbb{N}$, e um homeomorfismo Lipschitz $G : K \rightarrow M$ tal que G^{-1} também é Lipschitz. Em particular, as arestas de K têm comprimento 1. Para cada $k \in \mathbb{N}$, seja $K(k)$ o subcomplexo cúbico obtido pela subdivisão de K em cubos menores de arestas de comprimento 3^{-k} . Seja $c(k) \subset M$ o conjunto das imagens dos centros dos $(n+1)$ -cubos de $K(k)$.

Parte 2: Escolha uma função de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ com as seguintes propriedades:

- (a) cada nível $f^{-1}(t)$ intersecta no máximo um elemento de $c(k)$ para cada $k \in \mathbb{N}$, e
- (b) nenhum ponto crítico de f pertence a $c(k)$.

A existência de uma função satisfazendo tais propriedades pode ser verificada através de argumentos básicos de topologia diferencial; como feito no Lema 5.3 de [18].

Parte 3: Usamos $\omega(n)$ para representar o volume da bola Euclideana unitária de dimensão n . Fixado $k \in \mathbb{N}$, tome $\varepsilon > 0$ de modo que

- (a') para todos $x, y \in c(k)$, com $x \neq y$, temos

$$f(B_{\varepsilon 3^{-k}}(x)) \cap f(B_{\varepsilon 3^{-k}}(y)) = \emptyset, \text{ e}$$

- (b') para todo $t \in \mathbb{R}$ e $x \in c(k)$, temos

$$\mathbf{M}(f^{-1}(t) \cap B_{\varepsilon 3^{-k}}(x)) \leq 2\omega(n)\varepsilon^n 3^{-nk}.$$

A existência de ε com tais propriedades é consequência imediata da escolha das propriedades (a) e (b) que relacionam a cubicação escolhida e f . Observe ainda que (a') e (b') implicam que, para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$(33) \quad \mathbf{M}(f^{-1}(t) \cap B_{\varepsilon 3^{-k}}(c(k))) \leq 2\omega(n)\varepsilon^n 3^{-nk}.$$

Parte 4: Dados $k \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, existe uma aplicação Lipschitz $F : M \rightarrow M$ homotópica à identidade e tal que

- (i) $F(M - \cup_{x \in c(k)} B_{\varepsilon 3^{-k}}(x))$ está contido na imagem via G das faces de dimensão n de $K(k)$, e
- (ii) $|DF| \leq C/\varepsilon$,

onde $C > 0$ depende apenas de M . Intuitivamente, F é uma aplicação que em cada $(n+1)$ -cubo σ de $K(k)$ colapsa o complementar de uma bola de raio $\varepsilon 3^{-k}$ nas n -faces de σ , as quais têm arestas de comprimento 3^{-k} .

Parte 5: Dado $p \in \mathbb{N}$, seja $\Phi_p : \mathbb{R}\mathbb{P}^p \rightarrow \mathcal{Z}_n(M; \mathbb{Z}_2)$ o p -sweepout associado à função de Morse f , como construído no Exemplo 3.1 e revisitado no Exemplo 3.4. Escolha $k \in \mathbb{N}$ tal que $3^k \leq p^{\frac{1}{n+1}} \leq 3^{k+1}$. Tome $\varepsilon > 0$ satisfazendo os argumentos das partes 3 e 4.

Defina $\Psi : \mathbb{R}\mathbb{P}^p \rightarrow \mathcal{Z}_n(M; \mathbb{Z}_2)$ pela expressão

$$\Psi(\theta) = F_{\#}(\Phi_p(\theta));$$

i.e., substitua cada fatia de Φ_p pela sua imagem por F . Como F é Lipschitz, Ψ também é contínua. Além disso, o fato de que F é homotópica à identidade implica que Ψ é p -sweepout. A fim de concluir a prova é suficiente verificar que existe uma constante $C = C(M) > 0$ tal que, para todo $\theta \in \mathbb{R}\mathbb{P}^p$,

$$\mathbf{M}(\Psi(\theta)) \leq Cp^{\frac{1}{n+1}}.$$

Nas estimativas a seguir, C denota uma constante positiva que pode não ser a mesma em todas as etapas, mas só depende de M .

As propriedades 33 e (ii) da Parte 4 implicam que

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(F_{\#}(f^{-1}(t) \cap B_{\varepsilon 3^{-k}}(c(k)))) &\leq \left(\sup_M |DF| \right)^n \cdot 2\omega(n)\varepsilon^n 3^{-nk} \\ &\leq (C/\varepsilon)^n \cdot 2\omega(n)\varepsilon^n 3^{-nk} \leq C3^{-nk}. \end{aligned}$$

Cada fatia $\Phi_p(\theta)$ é composta por no máximo p níveis de f , logo

$$\mathbf{M}(F_{\#}(\Phi_p(\theta) \cap B_{\varepsilon 3^{-k}}(c(k)))) \leq Cp3^{-nk} \leq Cp^{\frac{1}{n+1}},$$

onde a última desigualdade segue da escolha de k .

Seja $B = M - B_{\varepsilon 3^{-k}}(c(k))$. A propriedade (i) da aplicação F garante que o suporte de $F_{\#}(\Phi_p(\theta) \cap B)$ está contido na união da imagem por G das n -faces de $K(k)$. Como estamos usando fatias com coeficientes em \mathbb{Z}_2 , a multiplicidade da imagem dessas n -faces é no máximo um. Observe que cada $(n+1)$ -cubo de K dá origem a $(n+1)(3^k+1)3^{kn}$ faces de dimensão n da subdivisão $K(k)$, as quais têm lados de comprimento 3^{-k} . Portanto,

$$\mathbf{M}(F_{\#}(\Phi_p(\theta) \cap B)) \leq C3^{k(n+1)}3^{-nk} = C3^k \leq Cp^{\frac{1}{n+1}},$$

onde, novamente, a última desigualdade segue da escolha de k . Isto encerra a prova da cota superior das p -widths. \square

6. Existência de infinitas mínimas

Nesta seção, apresentamos a prova do seguinte teorema de Codá Marques e Neves, [18].

TEOREMA 6.1. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta de dimensão $(n+1)$, com $2 \leq n \leq 6$, e curvatura de Ricci positiva.*

Então, M contém uma infinidade de hipersuperfícies mínimas, suaves, fechadas e mergulhadas distintas.

PROVA DO TEOREMA 6.1. Ao longo da prova usaremos a notação introduzida na seção anterior. Observando a relação

$$(34) \quad \omega_p(M) = \inf_{\Pi \in \mathcal{D}_p} \mathbf{L}(\Pi),$$

vemos que uma das seguintes afirmações é verdadeira:

- (i) $\omega_p(M) = \mathbf{L}(\Pi)$, para algum $\Pi \in \mathcal{D}_p$,
- (ii) existe uma sequência $\{\Pi_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}_p$, tal que $\mathbf{L}(\Pi_j)$ é estritamente decrescente em j e tende a $\omega_p(M)$ quando $j \rightarrow \infty$.

Se (ii) ocorre, é imediato verificar que existem infinitas hipersuperfícies mínimas como no enunciado do teorema. De fato, podemos aplicar o Teorema 4.2 para obter uma sequência de varifolds estacionários $\{\Sigma_j\}_j$ com suporte suave e $\|\Sigma_j\|(M) = \mathbf{L}(\Pi_j)$, para cada $j \in \mathbb{N}$. Se houvesse apenas um conjunto finito $\{\Lambda_1, \dots, \Lambda_\ell\}$ de mínimas fechadas e mergulhadas, as possíveis combinações $\sum_{i=1}^{\ell} n_i \|\Lambda_i\|(M)$, com $n_i \in \mathbb{N}$, formariam um conjunto de números reais sem pontos de acumulação, contradizendo (ii).

De agora em diante, suponha que (i) é verdadeira para todo $p \in \mathbb{N}$. Vamos dividir o restante da prova em dois casos: se $\omega_p(M) = \omega_{p+1}(M)$ para algum $p \in \mathbb{N}$, mostraremos que existem infinitas hipersuperfícies mínimas, suaves, fechadas e mergulhadas. A hipótese da curvatura de Ricci positiva não será utilizada nessa parte. A segunda parte trata do caso em que $\omega_p(M) < \omega_{p+1}(M)$, para todo $p \in \mathbb{N}$.

Primeiro caso: Suponha que existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $\omega_p(M) = \omega_{p+1}(M)$. Pelo que discutimos no início da demonstração,

$$\omega_{p+1}(M) = \mathbf{L}(\Pi) = \inf_{\Phi \in \Pi} \sup\{\mathbf{M}(\Phi(x)) : x \in \text{dmn}(\Phi)\},$$

para alguma classe de $(p+1)$ -sweepouts $\Pi \in \mathcal{D}_{p+1}$. Seja X o complexo cúbico que representa o domínio dos $(p+1)$ -sweepouts em Π . Escolha uma sequência minimizante $\Phi_i \in \Pi$; i.e., $\sup\{\mathbf{M}(\Phi_i(x)) : x \in \text{dmn}(\Phi_i)\}$ tende a $\omega_{p+1}(M)$. Afirmamos que existe uma infinidade de hipersuperfícies mínimas, suaves, fechadas e mergulhadas em M com volume de dimensão n menor que ou igual a $\omega_{p+1}(M)$. Vamos usar \mathcal{T} para denotar o conjunto contendo tais hipersuperfícies e a *flat chain* mod 2 nula. Um elemento de \mathcal{T} pode ter várias componentes conexas. Suponha, por contradição, que \mathcal{T} é finito.

A fim de obter uma contradição, é suficiente construir uma sequência Ψ_i de p -sweepouts com

$$(35) \quad \limsup_{i \rightarrow \infty} \sup\{\mathbf{M}(\Psi_i(x)) : x \in \text{dmn}(\Psi_i)\} \leq \omega_{p+1}(M) = \omega_p(M)$$

e tal que existe um número positivo ε_0 satisfazendo

$$(36) \quad \mathcal{F}^2(\Psi_i(x), \mathcal{T}) \geq \varepsilon_0,$$

para todo $x \in \text{dmn}(\Psi_i)$. Se todos os Ψ_i pertencerem a uma mesma classe de homotopia de p -sweepouts, podemos aplicar os passos da prova do Teorema min-max 4.2 para esta sequência e chegar a uma contradição. De fato, o que se prova é que para qualquer sequência minimizante fixa $\{\Psi_i\}_i$, é possível obter um varifold inteiro estacionário Σ como aquele que aparece no enunciado do teorema e que é um limite min-max de $\{\Psi_i\}_i$. Para uma sequência satisfazendo (35) e (36), nenhum limite min-max Σ pode ter como suporte uma hipersuperfície mínima, suave, fechada e mergulhada. Caso contrário, teríamos $\|\Sigma\|(M) = \omega_{p+1}(M)$, para algum Σ da forma

$$\Sigma = \lim_{j \rightarrow \infty} |\Psi_{i_j}(x_j)|,$$

para alguma sequência $i_j \rightarrow \infty$ e $x_j \in \text{dmn}(\Psi_{i_j})$. O limite acima é no sentido de varifolds. Suponha, a menos de passagem a uma subsequência, que $\Psi_{i_j}(x_j)$ também converge na topologia *flat* para alguma $T \in \mathcal{Z}_n(M; \mathbb{Z}_2)$. Segue da semi-continuidade inferior da massa que o suporte de T está contido no suporte do varifold limite Σ . Se $\text{spt}(\Sigma)$ é suave, o teorema da constância implica que T é a soma das *flat chains* mod 2 associadas a algumas das componentes do suporte de Σ e, portanto, T pertence a \mathcal{T} . O que contradiz

(36). O mesmo argumento, seguindo os passos da prova do Teorema min-max, pode ser aplicado quando a sequência de p -sweepouts Ψ_i não pertence a uma classe de homotopia fixa. Passemos a construção dessas aplicações.

Escolha $\varepsilon > 0$ satisfazendo o Lema 2.1 e tal que as bolas de raio ε centradas nos elementos de \mathcal{T} são duas a duas disjuntas. Para cada $i \in \mathbb{N}$, considere a decomposição $X = Y_i \cup Z_i$, onde

$$Y_i = \{x \in X : \mathcal{F}^2(\Phi_i(x), \mathcal{T}) \geq \varepsilon\}$$

e $Z_i = X - Y_i$. Seja Ψ_i a restrição de Φ_i ao subconjunto Y_i . Como restrição de uma sequência minimizante de p -sweepouts, a propriedade (35) é válida para esta escolha de Ψ_i . Além disso, a definição dos Y_i garante (36). Resta mostrar que Ψ_i é p -sweepout. Para tanto, usaremos a Proposição 3.3.

A continuidade de Ψ_i é consequência imediata da continuidade Φ_i . Seja $\lambda = \Phi_i^*(\bar{\lambda}) \in H^1(X; \mathbb{Z}_2)$. Também usaremos λ para denotar sua restrição a Y_i ; i.e., o elemento $i^*(\lambda) \in H^1(Y_i; \mathbb{Z}_2)$ induzida pela inclusão $i : Y_i \rightarrow X$. Pela Proposição 3.3, temos que para uma curva qualquer $\gamma : S^1 \rightarrow X$, tem-se $\lambda(\gamma) \neq 0$ se, e somente se, $\Phi_i \circ \gamma$ é um sweepout. Como Ψ_i é apenas a restrição de Φ_i , essa propriedade também é válida para curvas em Y_i .

Para finalizar, basta mostrar que $\lambda^p \neq 0$ em $H^p(Y_i; \mathbb{Z}_2)$. Observe que $\lambda = 0$ em $H^1(Z_i; \mathbb{Z}_2)$. De fato, $\Phi_i(Z_i)$ está contido em uma união de bolas de raio ε centradas nas hipersuperfícies de \mathcal{T} . Logo, para qualquer $\gamma : S^1 \rightarrow Z_i$, temos que $\Phi_i \circ \gamma$ não é um sweepout. Pela discussão feita na Seção 3 sobre as equivalências da noção de sweepout, vemos que $\lambda(\gamma) = 0$, para toda curva γ em Z_i . Quando escrevemos $\lambda(\gamma)$, λ é pensado como o homomorfismo induzido pela dualidade $H^1(Z_i; \mathbb{Z}_2) = \text{Hom}(H_1(Z_i; \mathbb{Z}_2); \mathbb{Z}_2)$, proveniente do teorema dos coeficientes universais. Sendo assim, temos que $\lambda = 0$ como homomorfismo, logo $\lambda = 0$ em $H^1(Z_i; \mathbb{Z}_2)$. Suponha, por contradição, que $\lambda^p = 0$ em $H^p(Y_i; \mathbb{Z}_2)$. Pela Proposição 2.3, como $X = Y_i \cup Z_i$, teríamos $\lambda \smile \lambda^p = 0$ em $H^{p+1}(X; \mathbb{Z}_2)$, contradizendo o fato de que Φ_i é $(p+1)$ -sweepout.

Segundo caso: Resta analisar o caso em que $\omega_p(M) < \omega_{p+1}(M)$, para todo $p \in \mathbb{N}$. A ideia chave nessa parte é usar a cota semi-linear superior $\omega_p(M) \leq Cp^{\frac{1}{n+1}}$, como feito no Teorema 5.1. Pela discussão feita no início da prova, podemos supor que $\omega_p(M) = L(\Pi)$, para algum $\Pi \in \mathcal{D}_p$. Aplicando o Teorema min-max 4.2: existem números inteiros positivos $\ell_p, n_{p,1}, \dots, n_{p,\ell_p}$, e hipersuperfícies mínimas suaves, fechadas e mergulhadas $\Sigma_{p,j} \subset M$, $j = 1, \dots, \ell_p$, tais que $\Sigma_{p,j} \cap \Sigma_{p,i} = \emptyset$, se $j \neq i$, e com

$$(37) \quad \omega_p(M) = \sum_{j=1}^{\ell_p} n_{p,j} \cdot \mathbf{M}(\Sigma_{p,j}),$$

onde a massa \mathbf{M} coincide com o volume de dimensão n de $\Sigma_{p,j}$.

Pelo Teorema 1.10, duas hipersuperfícies mínimas fechadas em um espaço de curvatura de Ricci positiva sempre se intersectam. Logo, os limites min-max descritos no parágrafo anterior têm única componente, a qual será

denotada por $\Sigma^{(p)} = \Sigma_{p,1}$. Neste caso, a expressão (37) resume-se a

$$(38) \quad \omega_p(M) = n_p \cdot \mathbf{M}(\Sigma^{(p)}),$$

para o número natural $n_p = n_{p,1}$.

Agora podemos concluir a demonstração do teorema. Suponha, por contradição, que existem apenas N hipersuperfícies mínimas, suaves, fechadas e mergulhadas. Seja $\delta > 0$, tal que todas essas N hipersuperfícies mínimas de M têm área pelo menos δ . Fixe $p \in \mathbb{N}$ e observe que

$$(39) \quad p \leq \#\{j \in \mathbb{N} : \omega_j(M) \leq Cp^{\frac{1}{n+1}}\} \leq \frac{N \cdot C \cdot p^{\frac{1}{n+1}}}{\delta},$$

onde C é a constante que aparece no Teorema 5.1. De fato, por (38), cada $\omega_j(M)$ é da forma k vezes a área de uma das N hipersuperfícies mínimas. Pela escolha de δ , existem no máximo $(N \cdot C \cdot p^{\frac{1}{n+1}})/\delta$ números dessa forma. Como $\omega_j(M) < \omega_{j+1}(M)$, para todo $j \in \mathbb{N}$, estes números são dois a dois disjuntos, donde segue a cota superior em (39). A cota inferior é consequência imediata do Teorema 5.1. A relação acima é contraditória para p suficiente grande, o que encerra a demonstração. \square

Bibliografia

- [1] Agol, I., Marques, F., and Neves, A., *Min-max theory and the energy of links*. J. Amer. Math. Soc. 29 (2016), no. 2, 561-578.
- [2] Almgren, F., *The homotopy groups of the integral cycle groups*. Topology (1962), 257–299.
- [3] Birkhoff, G. D., *Dynamical systems with two degrees of freedom*. Trans. Amer. Math. Soc. 18 (1917), no. 2, 199–300.
- [4] Colding, T. and De Lellis, C., *The min-max construction of minimal surfaces*, Surveys in Differential Geometry VIII, International Press, (2003), 75–107.
- [5] Colding, T. and Minicozzi, W., *Estimates for the extinction time for the Ricci flow on certain 3-manifolds and a question of Perelman*. J. Amer. Math. Soc. 18 (2005), 561–569.
- [6] Colding, T. and Minicozzi, W., *Width and finite extinction time of Ricci flow*. Geom. Topol. 12 (2008), no. 5, 2537–2586.
- [7] De Lellis, C. and Pellandini, F., *Genus bounds for minimal surfaces arising from min-max constructions*. J. Reine Angew. Math. 644 (2010), 47-99.
- [8] De Lellis, C. and Tasnady, D., *The existence of embedded minimal hypersurfaces*. J. Differential Geom. 95 (2013), no. 3, 355-388.
- [9] Federer, H., *Geometric measure theory*. Springer (1969)
- [10] Fraser, A., *On the free boundary variational problem for minimal disks*. Comm. Pure Appl. Math., 53 (8) (2000) 931–971.
- [11] Gromov, M., *Dimension, nonlinear spectra and width*. Geometric aspects of functional analysis,(1986/87), 132-184, Lecture Notes in Math., 1317, Springer, Berlin, 1988.
- [12] Guaraco, M., *Min-max for phase transitions and the existence of embedded minimal hypersurfaces*. arXiv:1505.06698 [math.DG]
- [13] Guth, L., *Minimax problems related to cup powers and Steenrod squares*. Geom. Funct. Anal. 18 (2009), 1917–1987.
- [14] Hatcher, A., *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002. xii+544 pp.
- [15] Ketover, D., *Degeneration of Min-Max Sequences in 3-manifolds*. preprint, arXiv:1312.2666 [math.DG]
- [16] Marques, F. C., *Minimal surfaces - variational theory and applications*. Proceedings of the ICM, Seoul (2014).
- [17] Marques, F. C. and Neves, A., *Min-max theory and the Willmore conjecture*. Ann. of Math. (2) 179 (2014), no. 2, 683–782.
- [18] Marques, F. C. and Neves, A., *Existence of infinitely many minimal hypersurfaces in positive Ricci curvature*. preprint, arXiv:1311.6501 [math.DG]
- [19] Meeks III, W., Simon, L., and Yau, S.T., *Embedded minimal surfaces, exotic spheres, and manifolds with positive ricci curvature* Ann. of Math.(2) 116 (1982) no. 3, 621-659.
- [20] Micallef, M. and Moore, J., *Minimal two-spheres and the topology of manifolds with positive curvature on totally isotropic two-planes*. Ann. of Math. (2), 127(1) : 199–227, (1988).

- [21] Neves, A., *New applications of Min-max Theory*. Proceedings of the ICM, Seoul (2014).
- [22] Pitts, J., *Existence and regularity of minimal surfaces on Riemannian manifolds*, Mathematical Notes 27, Princeton University Press, Princeton, (1981).
- [23] Sacks, J. and Uhlenbeck, K., *The existence of minimal immersions of 2-spheres*. Ann. of Math. (2), 113 (1) : 1–24, (1981).
- [24] Sacks, J. and Uhlenbeck, K., *Minimal immersions of closed Riemann surfaces*. Trans. Amer. Math. Soc. 271 (1982), no. 2, 639-652.
- [25] Simon, L., *Lectures on geometric measure theory*, Proceedings of the Centre for Mathematical Analysis, Australian National University, Canberra, (1983). vii+272 pp.
- [26] Smith, F., *On the existence of embedded minimal 2-spheres in the 3-sphere, endowed with an arbitrary Riemannian metric*, supervisor L. Simon, University of Melbourne (1982).
- [27] Schoen, R., *Estimates for stable minimal surfaces in three-dimensional manifolds*. Seminar on Minimal submanifolds, Ann. of Math. Studies, v. 103, Princeton University Press (1983).
- [28] Schoen, R. and Simon, L., *Regularity of stable minimal hypersurfaces*. Comm. Pure Appl. Math. 34 (1981), no. 6, 741–797.
- [29] Schoen, R., Simon, L. and Yau, S. T., *Curvature estimates for minimal hypersurfaces*. Acta Math. 134 (1975), no. 3-4, 275–288.