

LE THEOREME DE GRIFFITHSpar N. KATZ0. Introduction

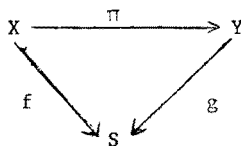
On démontre le théorème de GRIFFITHS [1], qui donne une façon systématique (bien que non-constructive) de "trouver" des cycles algébriques qui sont  $\mathbb{Q}_\ell$ -cohomologues à zéro, mais donc aucun multiple n'est algébriquement équivalent à zéro. La démonstration donnée ici (due à GROTHENDIECK) est la traduction en termes purement algébriques de la démonstration originelle, plus au moins transcendante, de GRIFFITHS. Dans toutes les deux, c'est le théorème d'irréductibilité XVIII 6.7 qui est un point-clef (cf. 3.1.6 et 3.2).

1. Le formalisme des classes primitives

Dans toute la suite, on suppose fixé un nombre premier  $\ell$ . Tous les schémas envisagés sont supposés à caractéristiques  $\neq \ell$ .

Considérons la situation

(1.0.1)



dans laquelle on suppose

(1.0.3)  $f, g$  lisses de dimensions relatives  $d_1$  et  $d_2$ ,

(1.0.4)  $\pi$  propre.

Compte tenu de ce que  $X$  et  $Y$  sont lisses sur  $S$ , la propriété de  $\pi$  nous donne un morphisme de Gysin (SGA 5 IV)

$$(1.0.5) \quad \pi_* : H^q(X, \mathcal{O}_X(i)) \longrightarrow H^{q-2(d_1-d_2)}(Y, \mathcal{O}_Y(i-(d_1-d_2))) .$$

Localisant sur  $S$  (au sens étale), on obtient également un morphisme de faisceaux sur  $S$

$$(1.0.6) \quad \pi_* : R^q f_* (\mathcal{O}_X(i)) \longrightarrow R^{q-2(d_1-d_2)} g_* (\mathcal{O}_Y(i-d_1+d_2)) ,$$

et, appliquant le foncteur  $H^p(S, \quad)$ , un morphisme

$$(1.0.7) \quad \pi_* : H^p(S, R^q f_* \mathcal{O}_X(i)) \longrightarrow H^p(S, R^{q-2(d_1-d_2)} g_* (\mathcal{O}_Y(i-d_1+d_2))) .$$

Définition 1.0.3. Soient  $(E_r^{p,q}, d_r^{p,q})$  et  $({}'E_r^{p,q}, {}'d_r^{p,q})$  deux suites spectrales (dans une catégorie abélienne donnée), et

$(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  Le décalage de  $({}'E_r^{p,q}, {}'d_r^{p,q})$  par  $(a, b)$  est la suite spectrale  $({}''E_r^{p,q}, {}''d_r^{p,q})$ , avec

$$(1.0.9) \quad \begin{cases} {}''E_r^{p,q} &= {}'E_r^{p+a, q+b} \\ {}''d_r^{p,q} &= {}'d_r^{p+a, q+b} \end{cases}$$

1.0.10. Un morphisme de suites spectrales de  $(E_r^{p,q}, d_r^{p,q})$  dans  $(E_r^{p,q}, d_r^{p,q})$  s'appelle un morphisme de bidegré  $(a, b)$  de  $(E_r^{p,q}, d_r^{p,q})$  dans  $(E_r^{p,q}, d_r^{p,q})$ .

Le lemme suivant est une conséquence triviale de la théorie du morphisme de Gysin (SGA 5, IV).

Lemme 1.1. Il existe un morphisme canonique  $\pi_*$  de bidegré  $(a, -2(d_1-d_2))$  des suites spectrales de Leray

$$(1.1.0) \quad R^p \alpha_* R^q f_* \mathcal{Q}_\ell(i) \implies R^{p+q}(\alpha f)_* \mathcal{Q}_\ell(i)$$

et

$$(1.1.1) \quad R^p \alpha_* R^q g_* \mathcal{Q}_\ell(i-d_1+d_2) \implies R^{p+q}(\alpha g)_* \mathcal{Q}_\ell(i-d_1+d_2) \quad ,$$

qui sur le terme  $E_2$  est donné par (1.0.7), et sur l'aboutissement par (1.0.5).

1.2. Considérons maintenant la situation

$$(1.2.1) \quad \begin{array}{ccccc} & & X & \times_S & Y & & \\ & \swarrow & & & & \searrow & \\ & \text{pr}_1 & & & & & \text{pr}_2 \\ & & X & & & & Y \\ & & \searrow & & \swarrow & & \\ & & f & & g & & \\ & & & \searrow & & \swarrow & \\ & & & S & & & \\ & & & \downarrow \alpha & & & \\ & & & T & & & \end{array} \quad ,$$

dans laquelle  $S, X, f, Y, g$  sont comme dans (1.0.2) - (1.0.4),  
 mais en supposant maintenant également  $f$  propre.

Soit

$$(1.2.2) \quad z \in H^a(X \times_S Y, \mathbb{Q}_\ell(b)).$$

Alors  $z$  induit une application (encore notée  $z$ )

$$(1.2.3) \quad z : H^q(X, \mathbb{Q}_\ell(i)) \longrightarrow H^{q+a-2d_1}(Y, \mathbb{Q}_\ell(i+b-d_1))$$

par la formule

$$(1.2.4) \quad z(x) = \text{pr}_{2*} (z \wedge \text{pr}_1^*(x)) \quad ,$$

où  $\text{pr}_{2*}$  est l'homomorphisme de Gysin Par localisation étale sur  $S$  ,  
 $z$  définit également

$$(1.2.5) \quad z : R^q f_* \mathbb{Q}_\ell(i) \longrightarrow R^{q+a-2d_1} g_* (\mathbb{Q}_\ell(i+b-d_1)) \quad ,$$

et, appliquant  $H^P(S, \text{---})$  , des applications

$$(1.2.6) \quad H^P(S, R^q f_* \mathbb{Q}_\ell(i)) \longrightarrow H^P(S, R^{q+a-2d_1} g_* (\mathbb{Q}_\ell(i+b-d_1))) \quad .$$

Lemme 1.3 La classe  $z$  définit un morphisme de bidegré  $(0, b-2d_1)$   
des suites spectrales de Leray

$$(1.2.7) \quad H^P(S, R^q f_* \mathbb{Q}_\ell(i)) \Rightarrow H^{P+q}(X, \mathbb{Q}_\ell(i))$$

et

$$(1.2.8) \quad H^P(S, R^q g_* \mathbb{Q}_\ell(i+b-d_1)) \Rightarrow H^{P+q}(Y, \mathbb{Q}_\ell(i+b-d_1)) \quad ,$$

qui sur les termes  $E_2$  est donné par (1.2.6), et par (1.2.3) sur les  
aboutissements.

Démonstration. Compte tenu de la formule (1.2.4) et de ce que la  
"multiplication par  $z$ " définit un morphisme de bidegré  $(0, a)$  de  
suites spectrales de Leray

$$(1.2.9) \quad H^p(S, R^q(\text{pr}_1 f)_* \mathbb{Q}_\ell(i)) \Rightarrow H^{p+q}(X \times_S Y, \mathbb{Q}_\ell(i))$$



$$(1.2.10) \quad H^p(S, R^{q+a}(\text{pr}_1 f)_* \mathbb{Q}_\ell(i+b)) \Rightarrow H^{p+q+a}(X \times_S Y, \mathbb{Q}_\ell(i+b)),$$

on n'a qu'à appliquer 1.1. à la situation

$$(1.2.11) \quad \begin{array}{ccc} X \times_S Y & \xrightarrow{\text{pr}_2} & Y \\ & \searrow f \text{ pr}_1 & \swarrow g \\ & & S \end{array}$$

Corollaire 1.4. Dans la situation (1.2.1) - (1.2.2), le morphisme  
(1.2.3)

$$(1.4.1) \quad z : H^q(X, \mathbb{Q}_\ell(i)) \longrightarrow H^{q+a-2d_1}(Y, \mathbb{Q}_\ell(i+b-d_1))$$

transforme classe primitive (XVIII 5.8.1) en classe primitive, et  
le diagramme suivant est commutatif.

$$(1.4.2) \quad \begin{array}{ccc} \text{Prim}^q(X/S, \mathcal{O}_\ell(i)) & \xrightarrow{z} & \text{Prim}^{q+a-2d_1}(Y/S, \mathcal{O}_\ell(i+b-d_1)) \\ \downarrow u_f & & \downarrow u_g \\ H^1(S, R^{q-1}f_*\mathcal{O}_\ell(i)) & \xrightarrow{z} & H^1(S, R^{q+a-2d_1-1}g_*\mathcal{O}_\ell(i+b-d_1)) \end{array}$$

(où  $u_f, u_g$  sont les homomorphismes canoniques de XVIII 5.8.1).

1.5. Soit  $\bar{\eta}$  un point géométrique de  $S$  (au-dessus d'un point  $\eta$  de  $S$ ), et soit

$$(1.5.1) \quad z_{\bar{\eta}} \in H^a(X_{\bar{\eta}} \times_{k(\bar{\eta})} Y_{\bar{\eta}}, \mathcal{O}_{\bar{\eta}}(b))$$

la classe induite par  $z$  sur la fibre géométrique correspondante de

$$(1.5.2) \quad X \times_S Y \longrightarrow S .$$

Proposition 1.5.3. Supposons  $f, g$  propres,  $S$  annexe, et soit  $q \in \mathbb{Z}$ . Si la classe  $z_{\bar{\eta}}$  induit l'homomorphisme nul

$$(1.5.3) \quad 0 = z_{\bar{\eta}} : H^{q-1}(X_{\bar{\eta}}, \mathcal{O}_{\bar{\eta}}(i)) \longrightarrow H^{q+a-2d_1-1}(Y_{\bar{\eta}}, \mathcal{O}_{\bar{\eta}}(i+b-d_1)) ,$$

alors, pour tout  $X \in \text{Prim}^q(X/S, \mathcal{O}_\ell(i))$ , on a

$$(1.5.4) \quad u_g(z(x)) = 0 \text{ dans } H^1(S, R^{q+a-2d_1-1}g_*\mathcal{O}_\ell(i+b-d_1)) .$$

Démonstration Par la commutativité de (1.4.2), il suffit de voir que  $z$  induit l'homomorphisme nul

$$(1.5.5) \quad z: R^{q-1} f_* \mathcal{O}_\ell(i) \xrightarrow{0} R^{q+a-2d_1-1} g_* \mathcal{O}_\ell(i+b-d_1).$$

Or  $f$  et  $g$  étant propres et lisses, les faisceaux  $R^i f_* \mathcal{O}_\ell(\cdot)$  et  $R^i g_* \mathcal{O}_\ell(\cdot)$  sont constantstordus (SGA 4 XVI 2.2), donc équivalents à leurs valeurs en  $\bar{\eta}$ , vus comme modules sous  $\pi_1(S, \bar{\eta})$ .

1.6. Une Construction de Manin

Supposons données deux sections de  $f: X \rightarrow S$ :

$$(1.6.0) \quad \begin{array}{ccc} & \begin{array}{c} \xrightarrow{t_1} \\ \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{t_2} \end{array} & \\ S & & X \end{array},$$

à chacune on associe sa classe de cohomologie

$$(1.6.1) \quad cl(t_i) = t_{i*}(1) \in H^{2d_1}(X, \mathcal{O}_\ell(d_1)).$$

Si les fibres de  $f: X \rightarrow S$  sont géométriquement connexes, (plus généralement si pour  $s \in S$ ,  $f(s)$  et  $g(s)$  appartiennent à la même composante connexe de  $X_s$ ) on voit bien que

$$(1.6.2) \quad cl(t_1) - cl(t_2) \in \text{Prim}^{2d_1}(X/S, \mathcal{O}_\ell(d_1)).$$

On désigne par

$$(1.6.3) \quad u_f(t_1 - t_2) \in H^1(S, R^{2d_1-1} f_* \mathcal{O}_{\mathcal{L}}(d_1))$$

son image par

$$(1.6.4) \quad u_f : \text{Prim}^{2d_1}(X/S, \mathcal{O}_{\mathcal{L}}(d_1)) \longrightarrow H^1(S, R^{2d_1-1} f_* \mathcal{O}_{\mathcal{L}}(d_1)) .$$

(C'est un analogue  $\mu(t_1 - t_2)$  de cet élément que Manin étudie dans [ 5 ]).

1.6.5. Soit maintenant  $z$  un cycle algébrique sur  $X \times_S Y$  de codimension  $\geq b$  sur chaque fibre de  $X \times_S Y$  (\*), qui détermine une classe de cohomologie (SGA 5 IV ):

$$(1.6.6) \quad cl(z) \in H^{2b}(X \times_S Y, \mathcal{O}_{\mathcal{L}}(b)) .$$

Cette classe définit une application (cf (1.2.3))

$$(1.6.7) \quad cl(z) \cdot H^{2d_1}(X, \mathcal{O}_{\mathcal{L}}(d_1)) \longrightarrow H^{2b}(Y, \mathcal{O}_{\mathcal{L}}(b)) ,$$

et si les cycles  $z(t_1)$  et  $z(t_2)$  sont définis, on a (grâce à la compatibilité SGA 5 IV du cup-produit avec les intersections de cycles):

---

(\*) Si  $S$  est lisse sur un schéma  $T$  (p. ex.  $T = \text{Spec } k$ ,  $k$  un corps), il suffirait de supposer  $z$  de codimension  $\geq b$  sur chaque fibre au-dessus de  $T$  .



$$(1.6.8) \quad \text{cl}(z) (\text{cl}(t_1) - \text{cl}(t_2)) = \text{cl}(z(t_1) - z(t_2)) .$$

La commutativité de (1.4.2) nous donne

$$(1.6.9) \quad \text{cl}(z) (u_f(t_1 - t_2)) = u_g(\text{cl}(z(t_1) - z(t_2)))$$

Comme corollaire de 1.5.3 , on a alors:

Proposition 1.7. Soient  $t_1$  et  $t_2$  deux sections de  $f : X \longrightarrow S$  ,  
 $f$  étant supposé à fibres connexes, et soit  $z$  un cycle algébrique  
sur  $X \times_S Y$  de codimension  $b$  , tel que le cycle algébrique

$$(1.7.1) \quad z(t_1) - z(t_2)$$

soit défini. Alors sa classe de cohomologie est primitive (XVIII 5.8.1).

Si le cycle algébrique  $Z_{\bar{\eta}}$  sur  $X_{\bar{\eta}} \times Y_{\bar{\eta}}$  induit l'homomorphisme nul

$$(1.7.2) \quad z_{\bar{\eta}} : H^{2d_1-1}(X_{\bar{\eta}}, \mathcal{Q}_{\ell}(d_1)) \xrightarrow{0} H^{2b-1}(Y_{\bar{\eta}}, \mathcal{Q}_{\ell}(b))$$

alors

$$(1.7.3) \quad u_g(z(t_1) - z(t_2)) = 0 \text{ dans } H^1(S, R^{2b-1}_{g*} \mathcal{Q}_{\ell}(b)) ,$$

(où  $u_g$  est l'homomorphisme de XVIII 5.8.1 intervenant dans 1.4).

2. Un rappel sur le niveau (Cf. [2], 9.7, 10.1 )

2.0.1. Soit  $X$  propre et lisse sur un corps  $k$  algébriquement clos.

On a vu (1.2.3) que, pour tout

(2.0.2)  $T$  propre, lisse et connexe sur  $k$  de dimension  $d$ ,

et tout

(2.0.3) cycle algébrique  $z$  de codimension  $b$  sur  $T \times X$ ,

la classe de cohomologie

$$(2.0.4) \quad \text{cl}(z) \in H^{2b}(T \times X, \mathbb{Q}_\ell(b))$$

donne lieu aux applications

$$(2.0.5) \quad \text{cl}(z) : H^q(T, \mathbb{Q}_\ell(i)) \longrightarrow H^{q+2b-2d}(X, \mathbb{Q}_\ell(i+b-d)) .$$

On définit la filtration par le co-niveau  $(N^j)$  de  $H^q(X, \mathbb{Q}_\ell(i))$

$$(2.0.6) \quad N^j H^q(X, \mathbb{Q}_\ell(i)) = \sum_{(T,z)} \text{images } \text{cl}(z) : H^{q-2j}(T, \mathbb{Q}_\ell(i-j)) \longrightarrow H^q(X, \mathbb{Q}_\ell(i)),$$

la somme étant étendue aux couples

(2.0.7)  $(T, z)$   $T/k$  propre lisse et connexe de dimension  $d$   
 $z$  cycle algébrique sur  $T \times X$  de codimension  $j+d$ .

Il faut remarquer qu'on parle parfois de la filtration  $F^j$  croissante

"par le niveau" , défini par

$$(2.0.8) \quad F^j H^q(X, \mathbb{Q}_\ell(i)) = N^{\lfloor \frac{g-1}{2} \rfloor} H^q(X, \mathbb{Q}_\ell(i)) .$$

Remplaçant  $(T, z)$  par  $(\mathbb{P}^1 \times T, \{pt\} \times z)$ , on voit que

$$(2.0.9) \quad N^j H^q(X, \mathcal{O}_X(i)) \subset N^{j-1} H^q(X, \mathcal{O}_X(i)) .$$

Evidemment on a:

Proposition 2.1. Soient  $X$  propre, lisse et géométriquement connexe sur un corps  $k$ ,  $\bar{k}$  une clôture algébrique de  $k$ ,  $X_{\bar{k}} = X \otimes_k \bar{k}$ .

Alors  $\text{gal}(\bar{k}/k)$ , agissant sur  $H^q(X_{\bar{k}}, \mathcal{O}_{X_{\bar{k}}}(i))$ , préserve la filtration par le co-niveau.

Des raisonnements standards (cf [2]) montrent les énoncés suivants.

Proposition 2.2. La filtration par le niveau est invariante par extension des corps algébriquement clos  $k'/k$ .

Proposition 2.3. Soient  $S$  un schéma réduit et irréductible, à point générique  $\eta$ , et

$$\pi : X \longrightarrow S$$

un morphisme propre et lisse, à fibres géométriquement connexes. Si, pour des entiers  $j$  et  $q$  donnés, on a pour la fibre générique géométrique  $X_{\eta}$

$$(2.3.1) \quad H^q(X_{\eta}, \mathcal{O}_{X_{\eta}}) = N^j H^q(X_{\eta}, \mathcal{O}_{X_{\eta}}) ,$$

alors il existe un ouvert non-vide  $U \subset S$  tel que en tout point  $u \in U$ , on ait pour la fibre géométrique  $X_u$

$$(2.3.2) \quad H^q(X_u, \mathcal{O}_{X_u}) = N^j H^q(X_u, \mathcal{O}_{X_u})$$

3. Application aux pincesaux de Lefschetz

3.1. A partir de maintenant, on fixe :

(3.1.0)  $k$  , un corps algébriquement clos,

(3.1.1)  $X \subset \mathbb{P}^r$  , un  $k$ -schéma projectif, lisse et connexe de dimension paire  $n$  , qui vérifie (LV) (XVIII 5.2.2) .

Prenons

(3.1.2)  $D = \{H_t\}_{t \in \mathbb{P}^1}$  un pinceau de Lefschetz d'hypersurfaces de degré  $d$  , à fibre générique

(3.1.3)  $X_\eta$  ,  $\eta$  = le point générique de  $\mathbb{P}^1$  .

Posons (cf. XVIII 5.4.4)

(3.1.4)  $m : X_\eta \hookrightarrow X \times_k k(\bar{\eta})$  l'inclusion ,

(3.1.5)  $E^{n-1}(X_\eta, \mathcal{O}_\ell(i)) =$  l'orthogonal de  ${}^*_{m} H^{n-1}(X, \mathcal{O}_\ell(i))$  dans  $H^{n-1}(X_\eta, \mathcal{O}_\ell(i))$  .

Nous avons vu (XVIII 6.7.2) que la formule de Picard-Lefschetz entraîne

(3.1.6) Si  $n$  est pair, tout sous-groupe d'indice fini dans  $\text{gal}(k(\bar{\eta})/k(\eta))$  agit de façon irréductible sur  $E^{2n-1}(X_\eta, \mathcal{O}_\ell(i))$  .

Proposition 3.2. Soit  $D = \{H_t\}$  un pinceau de Lefschetz, et supposons  
 $n = 2m$  pair. Alors ou bien

$$(3.2.1) \quad H^{n-1}(X_{\bar{\eta}}, \mathcal{O}_{\ell}(i)) \subset m^* H^{n-1}(X, \mathcal{O}_{\ell}(i)) + N^{m-1} H^{n-1}(X_{\bar{\eta}}, \mathcal{O}_{\ell}(i))$$

ou bien:

(3.2.2) Pour toute courbe C propre et lisse sur  $k(\bar{\eta})$ , et tout cycle algébrique z sur  $C \times X_{\bar{\eta}}$  de codimension m, l'homomorphisme induit (1.2.3)

$$(3.2.3) \quad cl(z) : H^1(C, \mathcal{O}_{\ell}(1+i-m)) \longrightarrow H^{2m-1}(X_{\bar{\eta}}, \mathcal{O}_{\ell}(i))$$

a son image dans  $m^* H^{2m-1}(X, \mathcal{O}_{\ell}(i))$  .

Démonstration. Supposons que l'image d'un tel homomorphisme (3.2.3) n'est pas contenu dans  $m^* H^{n-1}(X, \mathcal{O}_{\ell}(i))$ , ou, ce qui revient au même, que son image dans  $E^{n-1}(X_{\bar{\eta}}, \mathcal{O}_{\ell}(i)) = H^{n-1}(X_{\bar{\eta}}, \mathcal{O}_{\ell}(i)) H^{n-1}(X, \mathcal{O}_{\ell}(i))$

n'est pas nulle. Comme cette image est évidemment stable sous les opérations d'un sous-groupe d'indice fini dans  $gal(k(\bar{\eta})/k(\eta))$ , l'irréductibilité (3.1.6) de  $E^{n-1}(X_{\bar{\eta}}, \mathcal{O}_{\ell}(i))$  se récrit en disant

$$H^{n-1}(X_{\bar{\eta}}, \mathcal{O}_{\ell}(i)) = m^* H^{n-1}(X, \mathcal{O}_{\ell}(i)) + \text{l'image de (3.2.3)}$$

et, par définition,

$$\begin{aligned} \text{l'image de (3.2.3)} &= \text{l'image par } cl(z) \text{ de } H^1(C, \mathcal{O}_{\ell}(1+i-m)) \\ &\subset N^{m-1} H^{n-1}(X_{\bar{\eta}}, \mathcal{O}_{\ell}(i)) \end{aligned}$$

de sorte qu'on a bien trouvé

$$H^{n-1}(X_{\bar{\eta}}, \mathcal{O}_{\ell}(i)) = m^* H^{n-1}(X, \mathcal{O}_{\ell}(i)) + N^{m-1} H^{n-1}(X_{\bar{\eta}}, \mathcal{O}_{\ell}(i))$$

3.3. La condition (B).

3.3.1. On dira que l'inclusion

$$m : X_{\bar{\eta}} \hookrightarrow X \times_k k(\bar{\eta})$$

vérifie la condition (B) s'il existe

(3.3.2)  $V_{\bar{\eta}}$ , un cycle algébrique de codimension  $n-1$  sur  $X_{\bar{\eta}} \times (X \times_k k(\bar{\eta}))$

tel que l'application qu'il définit

$$(3.3.3) \quad V_{\bar{\eta}} : H^{n-1}(X_{\bar{\eta}}, \mathcal{O}_{\bar{\eta}}(i)) \longrightarrow H^{n-1}(X, \mathcal{O}_{\bar{\eta}}(i))$$

soit inverse à gauche de

$$(3.3.4) \quad m^* : H^{n-1}(X, \mathcal{O}_{\bar{\eta}}(i)) \longrightarrow H^{n-1}(X_{\bar{\eta}}, \mathcal{O}_{\bar{\eta}}(i)) \quad ,$$

i.e. tel que l'on ait

$$(3.3.5) \quad V_{\bar{\eta}} m^* = \text{id} \quad .$$

(3.4). Cette condition (B) est vérifiée si l'opération  $\wedge$  [4, 1.4.2.1] est algébrique (cf. [4, 2.12 (ii)]). On conjecture que  $\wedge$  est toujours algébrique, donc que la condition (B) est toujours vérifiée, et on sait le vérifier dans de nombreux cas [4]. Elle est vérifiée trivialement pour X une intersection complète de dimension paire car alors on sait (IX 1.6) que

$$(3.4.1) \quad H^{n-1}(X, \mathcal{O}_{\bar{\eta}}(i)) = 0 \quad .$$

4. Le théorème de GRIFFITHS

Théorème 4.1. Soit X projectif, lisse et connexe sur k, de dimension paire  $n = 2m \geq 4$ . Soit D un pinceau de Lefschetz de sections par des hypersurfaces de degré d. On suppose

(4.1.0) X vérifie (L V) (XVIII 5.2.2),

(4.1.1) le pinceau D vérifie l'hypothèse (A) (XVIII 5.3)

(4.1.2) le pinceau D vérifie (3.2.2), i.e. (3.2) la cohomologie évanescence  $E^{n-1}(X_{\bar{\eta}}, \mathcal{O}_{\bar{\eta}})$  n'est pas de niveau  $\leq 1$ ,

(4.1.3) l'inclusion  $m^* : X_{\bar{\eta}} \hookrightarrow X \times_k k(\bar{\eta})$  vérifie l'hypothèse (B) (3.3).

Alors, si un cycle algébrique z de codimension m sur X est tel que sa restriction (en tant que cycle algébrique) à  $X_{\bar{\eta}}$  satisfasse

(4.1.4)  $z_{\bar{\eta}} = z|_{X_{\bar{\eta}}}$  est algébriquement équivalent à zéro

Alors (4.1.5) z est  $\mathcal{O}_{\bar{\eta}}$ -cohomologue à zéro, i.e.  $cl(z) \in H^{2m}(X, \mathcal{O}_{\bar{\eta}}(m))$  est nul.

4.2. Une remarque sur le cas où X est une intersection complète.

Comme on a déjà remarqué (cf. XVIII 5.2.5, et (3.4)), les hypothèses

(4.1.0) et (4.1.3) sont alors automatiquement vérifiées. Quant à

l'hypothèse (4.1.1), on a vu (XVIII 6.3.4, 6.4) qu'elle est vérifiée pour

un pinceau d'hypersurfaces de degré  $d > 2n$ . D'autre part, on va

prouver dans le prochain exposé la condition (4.1.2) pour un pinceau

"général" d'hypersurfaces de degré  $d > 2n$  (XXI 5.2). Donc un pinceau

"général" d'hypersurfaces de degré  $d > 2n$  vérifie toutes les hypothèses

du théorème 4.1.

4.3. Revenant au cas où  $X$  est quelconque, il semble très plausible que pour un degré  $d$  assez grand, toutes les conditions de 4.1 sont vérifiées pour  $D$ , du moins pour  $D$  assez général. On a déjà vu que c'est le cas pour (4.1.1) (XVIII 6.4), et on a signalé qu'on conjecture que (4.1.0) et (4.1.3) sont vérifiés en tous cas (et c'est vrai en tous cas pour (4.1.0) si  $\text{car } k = 0$ ). Quant à la condition (4.1.2), elle est vérifiée (grâce à la théorie de Hodge) pour  $d$  grand si  $\text{car } k \neq 0$ , et des arguments heuristiques (que le lecteur trouvera en appendice à l'exposé suivant) rendent plausibles qu'il en est encore de même si  $\text{car } k > 0$ . Plus généralement, ces arguments (théorie de Hodge, resp cohomologie cristalline) prouvent (resp rendent plausible) que pour une variété projective lisse  $X$  de dimension  $n$ , et pour tout pinceau de Lefschetz  $D$  d'hypersurfaces de degré  $d$  assez grand (resp. tout pinceau  $D$  "assez général" d'hypersurfaces de degré  $d$ ) la cohomologie évanescence  $E^{n-1}(X_{\bar{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell)$  est de niveau égal à  $n-1$  (i.e. n'est pas de niveau  $\leq n-3$ , i.e. n'est pas de niveau 1).

4.4. Démonstration du théorème de Griffiths.

Soit  $z$  un cycle algébrique de codimension  $n$  sur  $X$ , tel que

(4.4.1)  $z_{\bar{\eta}} = z|_{X_{\bar{\eta}}}$  est algébriquement équivalent à zéro.

Par définition, il existe

(4.4.2) une courbe  $C_{\bar{\eta}}$ , propre, lisse et connexe sur  $k(\bar{\eta})$ ,



(4.4.3) deux sections  $t_i(\bar{\eta}) : \text{Sp}(k(\bar{\eta})) \longrightarrow C$  ,  $i=1,2$  ,

(4.4.4) un cycle algébrique  $P_{\bar{\eta}}$  sur  $C_{\bar{\eta}} \times X_{\bar{\eta}}$  , de codimension  $n$  , tels que

(4.4.5)  $z_{\bar{\eta}} = P_{\bar{\eta}}(t_1(\bar{\eta})) - P_{\bar{\eta}}(t_2(\bar{\eta}))$  sur  $X_{\bar{\eta}}$  .

Considérons le cycle  $P_{\bar{\eta}}$  comme une correspondance algébrique sur  $(C_{\bar{\eta}}, X_{\bar{\eta}})$  , définissant une correspondance cohomologique, encore notée  $P_{\bar{\eta}}$ , ou encore un homomorphisme

(4.4.6)  $P_{\bar{\eta}} : H^*(C_{\bar{\eta}}, \mathcal{Q}_{\ell}(i)) \longrightarrow H^{*+2(m-1)}(X_{\bar{\eta}}, \mathcal{Q}_{\ell}(i+m-1))$  .

Considérons de même la correspondance algébrique  $V_{\bar{\eta}}$  (3.3.2) sur  $(X_{\bar{\eta}}, X \otimes_k k(\bar{\eta}))$  donnée par l'hypothèse (3) de (4.1.3), définissant

(4.4.7)  $V_{\bar{\eta}} : H^*(X_{\bar{\eta}}, \mathcal{Q}_{\ell}(i+m-1)) \longrightarrow H^*(X \otimes_k k(\bar{\eta}), \mathcal{Q}_{\ell}(i+m-1))$  ,

d'où une correspondance algébrique composée  $Q_{\bar{\eta}} = V_{\bar{\eta}} \circ P_{\bar{\eta}}$  sur  $(C_{\bar{\eta}}, X \otimes_k k(\bar{\eta}))$  , définissant

(4.4.8)  $Q_{\bar{\eta}} = V_{\bar{\eta}} \circ P_{\bar{\eta}} : H^*(C_{\bar{\eta}}, \mathcal{Q}_{\ell}(i)) \longrightarrow H^{*+2(m-1)}(X \otimes_k k(\bar{\eta}), \mathcal{Q}_{\ell}(i+m-1))$

Considérons l'inclusion

$$m : X_{\bar{\eta}} \longrightarrow X \otimes_k k(\bar{\eta}) ,$$

donnant la correspondance algébrique  $m^*$  sur  $(X \otimes_k k(\bar{\eta}), X_{\bar{\eta}})$  , d'où

la correspondance composée  $m^* Q_{\bar{\eta}}$  sur  $(C_{\bar{\eta}}, X_{\bar{\eta}})$  , définissant

$$(4.4.9) \quad m^* Q_{\bar{\eta}} = m^* V_{\bar{\eta}} P_{\bar{\eta}} : H^*(C_{\bar{\eta}}, \mathcal{Q}_{\bar{\eta}}(i)) \longrightarrow H^{*+2(m-1)}(X_{\bar{\eta}}, \mathcal{Q}_{\bar{\eta}}(i+m-1)) .$$

Considérons la correspondance algébrique

$$(4.4.10) \quad R_{\bar{\eta}} = P_{\bar{\eta}} m^* Q_{\bar{\eta}} = (id - m^* V_{\bar{\eta}}) P_{\bar{\eta}} : H^*(C_{\bar{\eta}}, \mathcal{Q}_{\bar{\eta}}(i)) \longrightarrow H^{*+2(m-1)}(X_{\bar{\eta}}, \mathcal{Q}_{\bar{\eta}}(i+m-1)).$$

Comme  $V_{\bar{\eta}}$  est inverse à gauche de  $m^*$ ,  $(id - m^* V_{\bar{\eta}})$  est un projecteur dans  $H^*(X_{\bar{\eta}}, -)$ , dont l'image est un supplémentaire de

$\text{Im}(m^* : H^*(X_{\bar{\eta}} \otimes_k k(\bar{\eta}), -) \longrightarrow H^*(X_{\bar{\eta}}, -))$ . Comme en vertu de l'hypothèse

(4.1.2) l'homomorphisme

$$(4.4.11) \quad R_{\bar{\eta}} : H^1(C_{\bar{\eta}}, \mathcal{Q}_{\bar{\eta}}(i)) \longrightarrow H^{2m-1}(X_{\bar{\eta}}, \mathcal{Q}_{\bar{\eta}}(i+m-1))$$

a son image dans  $\text{Im } m^*$ , on trouve que

(4.4.12) l'homomorphisme (4.4.11) est nul

Choisissons maintenant une extension finie

$$L/k(\eta)$$

au-dessus de laquelle les objets

$$C_{\bar{\eta}}, t_1(\bar{\eta}), t_2(\bar{\eta}), Q_{\bar{\eta}}, R_{\bar{\eta}}$$

soient déjà définis, et

U un ouvert  $\neq \emptyset$  dans le normalisé de  $\mathbb{P}^1$  dans L.

Prenant U assez petit, il existe une courbe relative propre et lisse,

à fibres géométriquement connexes

$$C \longrightarrow U ,$$

dont la fibre générique géométrique soit  $C_{\bar{\eta}}$  , et deux sections

$$t_i : U \longrightarrow C \quad i = 1, 2$$

dont les valeurs en  $\bar{\eta}$  sont  $t_i(\bar{\eta})$  .

Soient

$$\rho : \tilde{X} \longrightarrow \mathbb{P}^1$$

la projection (XVIII 3.1.4) dont les fibres sont les sections du pinceau,

$$\tilde{X}_U = \tilde{X} \times_{\mathbb{P}^1} U ,$$

et

$$M : \tilde{X}_U \hookrightarrow X \times U$$

l'immersion canonique de  $\tilde{X}_U$  dans  $X \times U$  (considéré comme la famille constante sur  $U$  de valeur  $X$ ) ,

$$z_U = M^* \text{pr}_1^*(z) ,$$

le cycle algébrique sur  $\tilde{X}_U$  , induit par  $z$  . Prenant  $U$  assez petit,

il existe un cycle algébrique  $R$  sur  $C \times_U \tilde{X}_U$  dont la valeur en

$C_{\bar{\eta}} \times X_{\bar{\eta}}$  est  $R_{\bar{\eta}}$  , et un cycle algébrique  $Q$  sur  $C \times X \times U$  dont la

valeur en  $C_{\bar{\eta}} \times (X \otimes_k k(\bar{\eta}))$  est  $Q_{\bar{\eta}}$  , tels que l'on ait

$$(4.4.13) \quad z_U = R(t_1) - R(t_2) + (\text{id} \times M)^* [Q(t_1) - Q(t_2)] .$$

Pour démontrer le théorème, il suffira, grâce à l'injectivité de

l'homomorphisme de Griffiths "modulo partie fixe" (XVIII 5.8.7)

$$\text{Prim}^{2m}(X, \mathcal{Q}_\ell(n)) \xrightarrow{\text{grif}} \frac{H^1(U, R^{2m-1} \circ_{U^*} \mathcal{Q}_\ell(m))}{M^* H^1(U, H^{2m-1}(X, \mathcal{Q}_\ell(m)))} ,$$

de démontrer que l'image de  $z_U$  par

$$u_\circ : \text{Prim}^{2m}(\tilde{X}_{U/U}, \mathcal{Q}_\ell(m)) \longrightarrow H^1(U, R^{2m-1} \rho_{U^*} \mathcal{Q}_\ell(m))$$

se trouve dans  $M^*(H^1(U, H^{2m-1}(X, \mathcal{Q}_\ell(m)))$  .

Or, compte tenu de la décomposition (4.4.13), et de la commutativité de (1 4.2)

$$\begin{array}{ccc} \text{Prim}^2(C/U, \mathcal{Q}_\ell(1)) & \xrightarrow{Q} & \text{Prim}^{2m}(X \times U/U, \mathcal{Q}_\ell(n)) & \xrightarrow{M^*} & \text{Prim}^{2m}(\tilde{X}_{U/U}, \mathcal{Q}_\ell(m)) \\ & & \downarrow \text{u}_{pr_2} & & \downarrow u_\circ \\ & & H^1(U, H^{2m-1}(X, \mathcal{Q}_\ell(m))) & \xrightarrow{M^*} & H^1(U, R^{2m-1} \circ_{U^*} \mathcal{Q}_\ell(m)) , \end{array}$$

il suffit de démontrer

$$u_\circ(R(t_1) - R(t_2)) = 0 \text{ dans } H^1(U, R^{2n-1} \rho_{U^*} \mathcal{Q}_\ell(n)) ,$$

qui est conséquence de (4.3.12), grâce à 1.7.

### 5. Le Groupe de Griffiths

5.0. Soit  $S$  propre et lisse sur un corps  $k$  algébriquement clos.

Désignons par

(5.0.1)  $Z^i(S)$  le groupe des cycles algébriques de codimension  $i$  sur  $S$

(5.0.2)  $Z_{\text{alg}}^i(S)$  le sous-groupe de  $Z^i(S)$  formé des cycles algébri-  
quement équivalent à zéro,

et, pour tout nombre premier  $\ell \neq \text{car}(k)$

(5.0.3)  $Z_{\ell\text{-coh}}^i(S)$  le sous-groupe de  $Z^i(S)$  formé des cycles dont la  
classe de cohomologie dans  $H^{2i}(S, \mathbb{Q}_\ell(i))$  est nulle.

(On conjecture [4] que ce groupe est indépendant de  $\ell$ , ce qui est  
vrai du moins si  $\text{car}.k=0$ .)

On pose

(5.0.4)  $\text{Grif}_\ell^i(S) = Z_{\ell\text{-coh}}^i(S) / Z_{\text{alg}}^i(S)$ .

Si de plus  $S$  est projectif, et muni d'une immersion projective, on  
pose

(5.0.5)  $Z^{i, \text{prim}}(S) =$  le sous-groupe de  $Z^i(S)$  formé des cycles qui  
sont primitifs (i.e. dont la classe de cohomologie  
l'est),

(5.0.6)  $\text{Prim}_{\text{alg}}^{2i}(S, \mathbb{Q}_\ell(i)) =$  le sous- $\mathbb{Q}$ -vectoriel de  $H^{2i}(S, \mathbb{Q}_\ell(i))$   
engendré par des classes de cohomologie  
des cycles algébriques primitifs.

Corollaire 5.1 Sous les hypothèses de 4.1, on a

$$5.1.1. \quad \dim_{\mathbb{Q}}(\text{Grif}_{\mathbb{Z}}^n(X_{\hat{\eta}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) \geq \dim_{\mathbb{Q}}(\text{Prim}_{\text{alg}}^{2n}(X, \mathbb{Q}_\ell(n)))$$

En effet, d'après 4.1 5, le noyau de la flèche composée

$$\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} Z^{n, \text{prim}}(X) \xrightarrow{\text{rest. à } X_{\hat{\eta}}} \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} Z_{\ell\text{-coh}}^n(X_{\hat{\eta}}) \longrightarrow \text{Grif}_{\mathbb{Z}}^n(X_{\hat{\eta}})$$

est contenu dans  $Z_{\ell\text{-coh}}^n(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ , de sorte que  $\text{Prim}_{\text{alg}}^{2n}(X, \mathbb{Q}_{\ell}(n))$  est un quotient d'un sous-groupe de  $\text{Grif}^n(X_{\eta}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ , ce qui achève la démonstration

Remarque 5.2. Pour  $X$  une hypersurface quadrique dans  $\mathbb{P}^{2m+1}$  on a

$$\dim_{\mathbb{Q}_{\ell}}(\text{Prim}_{\text{alg}}^{2m}(X, \mathbb{Q}_{\ell}(m))) = 1$$

En particulier (4.2), pour  $X$  une quadrique dans  $\mathbb{P}^5$ , la section de  $X$  par une hypersurface générique de degré  $> 5$  contient une courbe,  $\mathbb{Q}_{\ell}$ -cohomologie à zéro, dont aucun multiple n'est algébriquement équivalent à zéro.

REFERENCES

[1] Griffiths, P. On the Periods of Certain Rational Integrals III, à paraître dans Annals of Mathematics.

[2] Grothendieck, A. Le Groupe de Brauer III (esp §§ 9, 10) dans Dix Exposés sur la Cohomologie des Schémas, North Holland, 1968.

[3] Jouanolou, J.P. Cohomologie  $\ell$ -adique, Thèse, Paris 1969.

[4] Kleiman, S. Algebraic Cycles and the Weil Conjectures, in Dix Exposés sur la Cohomologie des Schémas, North Holland, 1968.

[5] Manin, J. Rational Points of Algebraic Curves over Function Fields, Translations Amer. Math. Soc.