

ETUDE COHOMOLOGIQUE DES PINCEAUX DE LEFSCHETZpar N. Katz (*)SOMMAIRE

| | |
|---|----|
| 1. La cohomologie d'un fibré projectif. | 2 |
| 2. La cohomologie des variétés éclatées. | 4 |
| 3. L'éclatement associé à un pinceau. | 13 |
| 4. La cohomologie de l'éclatement associé à un pinceau. | 17 |
| 5. Etude cohomologique du morphisme $\rho : \tilde{X} \rightarrow \mathbb{P}^1$ associé à un pinceau. | 24 |
| 5.1. L'homomorphisme de restriction $H^*(\tilde{X}) \rightarrow H^*(Y)$. | 24 |
| 5.2. Le "théorème de Lefschetz vache" (LV). | 27 |
| 5.3. La condition (A). | 33 |
| 5.8. L'homomorphisme de Griffiths. | 47 |
| 5.9. Un exemple où l'hypothèse (A) n'est pas vérifié. | 57 |
| 6. Applications de la théorie locale des cycles évanescents (Picard-Lefschetz). | 58 |

(*) D'après des notes (succintes) de GROTHENDIECK.

INTRODUCTION

Dans le présent exposé nous donnons la structure cohomologique élémentaire des pinceaux de Lefschetz. Les sections 1-4 donnent les faits "bien connus" sur la structure cohomologique des fibrés projectifs et des éclatements. Dans 5 nous faisons l'étude qui figure dans le titre, en supposant que X satisfait au "théorème de Lefschetz vache" (5.2), et que le pinceau D en question satisfait à une certaine condition (A) de nature locale sur D (5.3). Les résultats principaux sont 5.6, 5.7 et 5.8.7, ce dernier intervenant de façon essentielle dans la démonstration du théorème de GRIFFITHS dans XX. Dans la dernière section, de nature nettement moins élémentaire, nous nous appuyons sur l'exposé SGA 1 XIII de Mme. RAYNAUD sur le groupe fondamental "modéré", et sur la formule de Picard-Lefschetz (XVI) pour démontrer :

- (1) La condition (A) est souvent satisfaite (6.3, 6.4) ;
- (2) Sauf dans le cas $\dim(X)$ impair et caractéristique = 2, le groupe de monodromie d'un pinceau de Lefschetz agit irréductiblement sur la "cohomologie évanescence", et transitivement (modulo signe) sur l'ensemble des

"cycles évanescents locaux" associés (via la formule de Picard-Lefschetz) aux divers "points critiques" du pinceau (6.6 et 6.7).

1. La cohomologie d'un fibré projectif

Théorème 1.1. (DELIGNE). Soient $f : X \rightarrow S$ un morphisme propre, l un nombre premier inversible sur S , $u \in H^2(X, \mathbb{Z}_l(1))$ (resp. $u \in H^2(X, \mathbb{Q}_l(1))$) une classe de cohomologie sur X , et \mathfrak{F} un \mathbb{Z}_l -faisceau (resp. \mathbb{Q}_l -faisceau) sur X . On suppose qu'il existe un entier n tel que pour tout entier j et tout entier $i > 0$, l'application

$$(1.1.1) \quad R^{n-i} f_* (\mathfrak{F}(j)) \xrightarrow{\wedge u^i} R^{n+i} f_* (\mathfrak{F}(j+i)) \quad ,$$

soit un isomorphisme de \mathbb{Z}_l -faisceaux (resp. de \mathbb{Q}_l -faisceaux) sur S .

Alors pour tout morphisme $g : S \rightarrow T$, la suite spectrale de Leray

$$E_2^{p,q} = R^p g_* R^q f_* (\mathfrak{F}) \implies R^{p+q} (gf)_* (\mathfrak{F})$$

est dégénérée.

La démonstration se trouve dans [1, Prop. 2.4]. On remarquera que, grâce au théorème de changement de base pour un morphisme propre (SGA 4 XII 5.2), l'hypothèse se vérifie fibre par fibre.

Théorème 1.2. (Cf. SGA 5 VII 2.2.1). Soit $\mathcal{E} \longrightarrow X$ un fibré vectoriel, localement libre de rang $1 + r$. Désignons par $f : \mathbb{P}(\mathcal{E}) \longrightarrow X$ le fibré projectif défini par \mathcal{E} , et par $u \in H^2(\mathbb{P}(\mathcal{E}), \mathbb{Z}_\ell(1))$ la première classe de Chern du faisceau inversible canonique $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1)$. Alors, pour ℓ un nombre premier inversible sur X , on a

a) la suite spectrale

$$(1.2.1) \quad E_2^{p,q} = H^p(X, R^q f_* \mathbb{Z}_\ell) \implies H^{p+q}(\mathbb{P}(\mathcal{E}), \mathbb{Z}_\ell)$$

dégénère.

b) la flèche

$$(1.2.2) \quad \bigoplus_{0 \leq j \leq n} H^{q-2-j}(X, \mathbb{Z}_\ell(-j)) \longrightarrow H^q(\mathbb{P}(\mathcal{E}), \mathbb{Z}_\ell)$$

défini par $\bigoplus \tau_{q-2j} \longrightarrow \Sigma f^*(\tau_{q-2j}) \wedge u^j$

est un isomorphisme.

Démonstration. Les fibres de f étant des espaces projectifs de dimension r on sait que

$$(1.2.3) \quad R^i f_* \mathbb{Z}_\ell \longleftarrow \begin{cases} \mathbb{Z}_\ell \binom{-1}{2} & \text{pour } i \text{ pair, } 0 \leq i \leq 2r \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le théorème 1.1 s'applique à la situation $(f, \ell, u, \mathbb{Z}_\ell, r)$, d'où a).

D'après 1.2.3 on a

$$(1.2.4) \quad E_2^{a,b} = \begin{cases} H^a(X, Z_\ell(\frac{-b}{2})) & \text{pour } b \text{ pair, } 0 \leq b \leq 2r \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

donc le gradué associé de $H^q(\mathbb{P}(\mathcal{E}), Z_\ell)$ pour la filtration provenant de la suite spectrale est $\bigoplus_{0 \leq j \leq r} H^{q-2j}(X, Z_\ell(-j))$. On voit tout de suite que, munissant $\bigoplus_{0 \leq j \leq r} H^{q-2j}(X, Z_\ell(-j))$ de la filtration

$$F^i = \bigoplus_{\substack{0 \leq j \leq r \\ q-2j \leq i}} H^{q-2j}(X, Z_\ell(-j)),$$

la flèche 1.2.2 est compatible aux filtrations, et qu'elle induit l'identité sur les gradués associés, d'où b).

2. La cohomologie des variétés éclatées (cf. SGA 5 VII 8)

2.1. Soient X un schéma lisse sur un corps k , et $\Delta \subset X$ un schéma lisse partout de codimension $1 + r$. On sait (EGA IV 19.4.9) qu'il existe un schéma lisse \tilde{X} , muni d'un morphisme projectif

$$(2.1.1) \quad f : \tilde{X} \longrightarrow X$$

tel que, posant

$$(2.1.2) \quad \tilde{\Delta} = f^{-1}(\Delta) = \Delta \times_X \tilde{X},$$

f induise un isomorphisme

$$(2.1.3) \quad f / \tilde{X} - \tilde{\Delta} : \tilde{X} - \tilde{\Delta} \xrightarrow{\sim} X - \Delta,$$

et qu'il existe un Δ -isomorphisme entre $\tilde{\Delta}$ et $\mathbb{P}(\underline{N}_{\Delta/X})$, le fibré projectif

des droites dans le fibré normal $\underline{N}_{\Delta/X}$ de Δ dans X . On a donc un diagramme commutatif :

$$(2.1.4) \quad \begin{array}{ccc} \tilde{\Delta} & \simeq & \check{\mathbb{P}}^r(N_{\Delta|X}) \\ f|_{\tilde{\Delta}} \searrow & & \swarrow \text{proj. canonique} \\ & \Delta & \end{array}$$

2.1.5. Dans le cas spécial $X = \text{Spec}(A)$, $\Delta = \text{Spec}(A/I)$ où $I = (g_0, \dots, g_r)$, \tilde{X} s'obtient par le procédé de Hopf (cf. EGA IV 19.4.11) :

On définit un morphisme de $X - \Delta$ dans \mathbb{P}^r par

$$x \in X - \Delta \longrightarrow (g_0(x), \dots, g_r(x)) \in \mathbb{P}^r,$$

et on considère son graphe Γ comme plongé dans $X \times \mathbb{P}^r$. Alors on définit $\tilde{X} = 1$ 'adhérence schématique de Γ dans $X \times \mathbb{P}^r$, le morphisme $f : \tilde{X} \longrightarrow X$ s'obtient comme le composé

$$\tilde{X} \hookrightarrow X \times \mathbb{P}^r \xrightarrow{\text{pr}_1} X.$$

2.1.6. De façon analogue (cf. encore EGA IV 19.4.11), si X est projectif, et si Δ est l'intersection de X avec $1 + r$ hypersurfaces, disons d'équations $G_i = 0$, $i = 0, \dots, r$, on considère encore le morphisme

$$\begin{array}{ccc} X - \Delta & \longrightarrow & \mathbb{P}^r \\ x \in X - \Delta & \longrightarrow & (G_0(x), \dots, G_r(x)), \end{array}$$

et on obtient \tilde{X} comme l'adhérence de son graphe dans $X \times \mathbb{P}^r$. De façon

concrète, en termes des coordonnées homogènes $\lambda_0, \dots, \lambda_r$ dans \mathbb{P}^r , \tilde{X} s'obtient comme le schéma de $X \times \mathbb{P}^r$ défini par les équations

$$(2.1.6.1) \quad \lambda_i G_j(X) - \lambda_j G_i(X) \quad 0 \leq i < j \leq r \quad .$$

On voit par ces équations que le point (x, λ) se trouve dans \tilde{X} si et seulement si $x \in \Delta$; autrement dit, $\mathbb{P}^r(N_{\Delta/X})$ est le fibré projectif trivial

$$(2.1.6.2) \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{P}^r(N_{\Delta/X}) & \simeq & \Delta \times \mathbb{P}^r \\ \text{proj. canonique} \searrow & & \swarrow \text{pr}_i \\ & \Delta & \end{array} .$$

On a le diagramme commutatif suivant

$$(2.1.6.3) \quad \begin{array}{ccccccc} \Delta \times \mathbb{P}^r & \xrightarrow{\sim} & \tilde{\Delta} & \hookrightarrow & \tilde{X} & \hookrightarrow & X \times \mathbb{P}^r \\ & \searrow \text{pr}_1 & \downarrow f|_{\tilde{\Delta}} & & \downarrow f & & \swarrow \text{pr}_1 \\ & & \Delta & \hookrightarrow & X & & \end{array} ,$$

et l'inclusion composée $\Delta \times \mathbb{P}^r \hookrightarrow X \times \mathbb{P}^r$ provient de $\Delta \hookrightarrow X$ par changement de base.

Théorème 2.2. Soient X lisse sur un corps k , Δ un sous-schéma lisse partout de codimension $1 + r$, et $f : \tilde{X} \longrightarrow X$ l'éclatement de X en Δ . Alors :

(2.2.1) La suite spectrale de Leray

$$E_2^{p,q} = H^p(X, R^q f_* \mathbb{Z}_\lambda) \implies H^{p+q}(\tilde{X}_0, \mathbb{Z}_\lambda)$$

dégénère.

2.2.2. Il existe un isomorphisme additif

$$H^q(\tilde{X}, \mathbb{Z}_\ell) \xleftarrow{\sim} H^q(X, \mathbb{Z}_\ell) \oplus H^q(\tilde{\Delta}, \mathbb{Z}_\ell) / \text{Im } H^q(\Delta, \mathbb{Z}_\ell) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{j=1}^r H^{q-2j}(\Delta, \mathbb{Z}_\ell(-j)) \oplus H^q(X, \mathbb{Z}_\ell) .$$

Démonstration. Désignons par

$$(2.2.3) \quad g : \tilde{\Delta} \longrightarrow \Delta$$

la restriction de f à $\tilde{\Delta}$, et par

$$(2.2.4) \quad \begin{cases} j : \Delta \hookrightarrow X \\ i : \tilde{\Delta} \hookrightarrow \tilde{X} \end{cases}$$

les inclusions, de façon à obtenir le diagramme commutatif

$$(2.2.5) \quad \begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xleftarrow{i} & \tilde{\Delta} \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ X & \xleftarrow{j} & \Delta \end{array} .$$

Celui-ci induit un homomorphisme des suites spectrales de Leray pour les morphismes f et g , et le faisceau \mathbb{Z}_ℓ sur \tilde{X} et $\tilde{\Delta}$,

$$(2.2.6) \quad E_r^{p,q}(f) \xrightarrow{(f^*, j^*)} E_r^{p,q}(g)$$

D'autre part, f induisant un isomorphisme de $\tilde{X} - \tilde{\Delta}$ avec $X - \Delta$, nous avons, par le théorème de changement de base pour un morphisme propre,

$$(2.2.7) \quad R^q f_* \mathbb{Z}_\ell \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}_\ell & \text{si } q = 0 \\ j_* R^q g_* \mathbb{Z}_\ell & \text{si } q > 0 \end{cases} ,$$

d'où

$$(2.2.8) \quad E_2^{p,q}(f) \xrightarrow{(i^*, j^*)} E_2^{p,q}(g) \quad \text{pour } q \neq 0 .$$

Nous allons démontrer par récurrence sur r que

$$(2.2.9) \quad E_r^{p,q}(f) \xrightarrow{(i^*, j^*)} E_r^{p,q}(g) \quad \text{pour } q \neq 0, r \geq 2$$

et

$$(2.2.10) \quad d_r^{p,q}(f) = 0 \quad \text{pour } r \geq 2 .$$

Admettons pour l'instant la formule

$$(2.2.11) \quad d_r^{p,r-1}(f) = 0 \quad \text{pour } r \geq 2, \text{ tout } p .$$

Commençons par $r = 2$. Nous avons un diagramme commutatif

$$(2.2.12) \quad \begin{array}{ccc} E_2^{p,q}(f) & \xrightarrow{(i^*, j^*)} & E_2^{p,q}(g) \\ \downarrow d_2^{p,q}(f) & & \downarrow 0 = d_2^{p,q}(g) \\ E_2^{p+2, q-1}(f) & \xrightarrow{(i^*, j^*)} & E_2^{p+2, q-1}(g) \end{array} .$$

Pour $q \leq 0$, on a $E_2^{p+2, q-1}(f) = 0$, donc $d_2^{p,q}(f) = 0$. Pour $q = 1$, on a $d_2^{p,1}(f) = 0$ par (2.2.11), et pour $q > 1$, les flèches horizontales dans (2.2.12) sont des isomorphismes, et on sait que $d_2^{p,q}(g) = 0$ par 1.2 et 2.1.4. Ceci donne (2.2.10) pour $r = 2$, et (2.2.9) pour $r = 2$ n'est autre que (2.2.8).

Supposons connues (2.2.9) et (2.2.10) pour une valeur de $r \geq 2$.

L'hypothèse (2.2.10) implique $E_r^{p,q}(f) \simeq E_{r+1}^{p,q}(f)$, et par 1.2 on a $E_r^{p,q}(g) \simeq E_{r+1}^{p,q}(g)$, de sorte qu'on a le diagramme commutatif

$$(2.2.13) \quad \begin{array}{ccc} E_r^{p,q}(f) & \xrightarrow{(i^*, j^*)} & E_r^{p,q}(g) \\ \downarrow \zeta & & \downarrow \zeta_i \\ E_{r+1}^{p,q}(f) & \xrightarrow{(i^*, j^*)} & E_{r+1}^{p,q}(g) \end{array} ,$$

ce qui donne (2.2.9) pour $r+1$, compte tenu de (2.2.9) pour r . Pour déduire (2.2.10) pour $r+1$, on regarde le diagramme commutatif

$$(2.2.14) \quad \begin{array}{ccc} E_{r+1}^{p,q}(f) & \xrightarrow{(i^*, j^*)} & E_{r+1}^{p,q}(g) \\ \downarrow d_{r+1}^{p,q}(f) & & \downarrow 0 = d_{r+1}^{p,q}(g) \\ E_{r+1}^{p+r+1, q-r}(f) & \xrightarrow{(i^*, j^*)} & E_{r+1}^{p+r+1, q-r}(g) \end{array} .$$

Pour $q \leq r-1$, on a $E_{r+1}^{p+r+1, q-r}(f) = 0$, donc $d_r^{p,q}(f) = 0$. Pour $q = r$, on a (2.2.11), et pour $q > r$ les flèches horizontales dans (2.2.14) sont des isomorphismes, et $d_{r+1}^{p,q}(g) = 0$ par 1.2, d'où la conclusion voulue.

Il reste à vérifier (2.2.11), qui signifie que le "edge homomorphisme" composé

$$(2.2.15) \quad E_2^{p,0}(f) \longrightarrow E_3^{p,0}(f) \longrightarrow E_4^{p,0}(f) \longrightarrow \dots E_\infty^{p,0}(f)$$

est un isomorphisme, i.e. que

$$(2.2.16) \quad f^* : H^p(X, Z_\ell) \longrightarrow H^p(\tilde{X}, Z_\ell)$$

est injectif. Or, il existe un inverse à gauche, savoir l'homomorphisme de Gysin (SGA 5 IV)

$$(2.2.17) \quad f_* : H^P(\tilde{X}, \mathbb{Z}_\ell) \longrightarrow H^P(X, \mathbb{Z}_\ell) \quad ,$$

qui vérifie en effet,

$$(2.2.18) \quad f_* f^* = \text{id}.$$

comme il résulte de la formule de projection, et du fait que $f_*(1) = 1$, f étant birationnel donc de degré un.

Ceci démontre (2.2.1). Quant à (2.2.2), remarquons que le diagramme (2.2.5) donne, par passage à la cohomologie, un diagramme commutatif

$$(2.2.19) \quad \begin{array}{ccc} H^P(\tilde{X}, \mathbb{Z}_\ell) & \xrightarrow{i^*} & H^P(\tilde{\Delta}, \mathbb{Z}_\ell) \\ \uparrow f^* & & \uparrow g^* \\ H^P(X, \mathbb{Z}_\ell) & \xrightarrow{j^*} & H^P(\Delta, \mathbb{Z}_\ell) \quad , \end{array}$$

d'où un morphisme

$$(2.2.20) \quad \frac{H^P(\tilde{X}, \mathbb{Z}_\ell)}{f_* H^P(X, \mathbb{Z}_\ell)} \xrightarrow{(i^*, j^*)} \frac{H^P(\tilde{\Delta}, \mathbb{Z}_\ell)}{g_* H^P(\Delta, \mathbb{Z}_\ell)} \quad .$$

Désignons par F^i les filtrations de $H^*(\tilde{X}, \mathbb{Z}_\ell)$ et de $H^*(\tilde{\Delta}, \mathbb{Z}_\ell)$ provenant des suites spectrales de Leray, de sorte que (2.2.20) se réécrit

$$(2.2.21) \quad \frac{H^p(\tilde{X}, \mathbb{Z}_\ell)}{F^p H^p(\tilde{X}, \mathbb{Z}_\ell)} \xrightarrow{(i^*, j^*)} \frac{H^p(\tilde{\Delta}, \mathbb{Z}_\ell)}{H^p_{F^p}(\tilde{\Delta}, \mathbb{Z}_\ell)}$$

Or, d'après (2.2.9), le gradué associé à la flèche (2.2.21) est un isomorphisme, donc (2.2.20) est un isomorphisme. D'autre part, (2.2.18)

donne une décomposition en somme direct

$$(2.2.22) \quad H^*(\tilde{X}, \mathbb{Z}_\ell) \begin{array}{c} \xleftarrow{f^* + \text{inclusion}} \\ \xrightarrow{f_* \oplus (1 - f_* f_*)} \end{array} H^*(X, \mathbb{Z}_\ell) \oplus \text{Ker } f_*$$

et (1.2.2) nous donne une décomposition en somme directe

$$(2.2.23) \quad \frac{H^*(\tilde{\Delta}, \mathbb{Z}_\ell)}{g^* H^*(\Delta, \mathbb{Z}_\ell)} \xleftarrow{\sim} \bigoplus_{1 \leq j \leq r} H^{*-2j}(\Delta, \mathbb{Z}_\ell(-j)) ;$$

mettant ensemble l'isomorphisme (2.2.20) et les décompositions (2.2.22) et (2.2.23), on trouve (2.2.2), cqfd.

Remarque 2.2.24. Esquissons une deuxième démonstration de (2.2.2)

nettement plus simple, valable dans le cas où X est propre sur k. Plus généralement, on trouve (sans hypothèse sur X) le résultat correspondant (2.2.26) en cohomologie à support propre. Nous avons les suites exactes de "cohomologie à supports propres", notée H^*_c , pour les couples (\tilde{X}, Δ) et (X, Δ) qui forment un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
 (2.2.25) & \longrightarrow & H_c^i(\tilde{X}-\tilde{\Delta}, \mathbb{Z}_\ell) & \longrightarrow & H_c^i(X, \mathbb{Z}_\ell) & \longrightarrow & H_c^i(\Delta, \mathbb{Z}_\ell) & \longrightarrow & H_c^{i+1}(\tilde{X}-\tilde{\Delta}, \mathbb{Z}_\ell) \\
 & & \uparrow \wr & & \uparrow f^* & & \uparrow g^* & & \uparrow \wr \\
 (2.2.26) & \longrightarrow & H_c^i(X-\Delta, \mathbb{Z}_\ell) & \longrightarrow & H_c^i(X, \mathbb{Z}_\ell) & \longrightarrow & H_c^i(\Delta, \mathbb{Z}_\ell) & \longrightarrow & H_c^{i+1}(X-\Delta, \mathbb{Z}_\ell) \quad .
 \end{array}$$

Or, le quotient du complexe acyclique (2.2.25) par le sous-complexe acyclique (2.2.26) nous donne le complexe acyclique

$$(2.2.27) \longrightarrow 0 \longrightarrow \frac{H_c^i(\tilde{X}, \mathbb{Z}_\ell)}{f^*H_c^i(X, \mathbb{Z}_\ell)} \longrightarrow \frac{H_c^i(\tilde{\Delta}, \mathbb{Z}_\ell)}{g^*H_c^i(\Delta, \mathbb{Z}_\ell)} \longrightarrow 0 \longrightarrow$$

i.e, on trouve, sans considérer des suites spectrales, que (2.2.20) est un isomorphisme. Dès lors, les raisonnements qu'on vient de donner s'appliquent pour donner (2.2.2).

Corollaire 2.3. Posons

$$b_q(X) = \dim_{\mathbb{Q}_\ell} H^q(\chi, \mathbb{Q}_\ell), \quad \chi(X) = \sum (-1)^q b_q(X) \quad .$$

On a

$$(2.3.1) \quad b_q(\tilde{X}) = b_q(X) + \sum_{j=1}^r b_{q-j}(\Delta) \quad ,$$

$$(2.3.2) \quad \chi(\tilde{X}) = \chi(X) + r \chi(\Delta) \quad .$$

3. L'éclatement associé à un pinceau

3.1. Soient X projectif, lisse et irréductible sur un corps k algébriquement clos, de dimension u, et $D = \{H_\tau\}_{\tau \in \mathbb{P}^1}$ un pinceau d'hyper-surfaces dont l'axe coupe transversalement X, en Δ . Considérons alors l'éclatement de X en Δ , que nous allons décrire explicitement.

En termes d'équations, désignant par (λ, μ) des coordonnées homogènes de \mathbb{P}^1 , et par F et G deux formes linéaires tels que $F = G = 0$ définit l'axe du pinceau, le pinceau s'écrit

$$(3.1.1) \quad \lambda F - \mu G = 0$$

Le sous-schéma Δ est par définition l'intersection de X avec la sous-variété linéaire $G = F = 0$. D'après 2.1.6,

$$(3.1.2) \quad \tilde{X} = \{(x, (\lambda, \mu)) \in X \times \mathbb{P}^1 \mid \lambda F - \mu G = 0\};$$

c'est l'adhérence schématique, dans $X \times \mathbb{P}^1$, du graphe de l'application

$$(3.1.3) \quad \begin{array}{ccc} X - \Delta & \longrightarrow & \mathbb{P}^1 \\ x & \longrightarrow & (G(x), F(x)) \end{array}$$

La grande vertu de \tilde{X} est d'être une variété projective (car plongée dans $X \times \mathbb{P}^1$) et lisse (car Δ l'est) sur k, qui admet un morphisme ρ vers \mathbb{P}^1 , à savoir

$$(3.1.4) \quad \rho : \tilde{X} \longrightarrow X \times \mathbb{P}^1 \xrightarrow{\text{Pr}_2} \mathbb{P}^1,$$

dont les fibres sont les sections hyperplanes de X par les membres de notre pinceau

$$\rho^{-1}(t) = X_t \stackrel{\text{déf}}{=} X.H_t$$

3.2. Le degré de la variété duale : méthode topologique.

Supposons en plus que le pinceau de 3.1 soit tel que

(3.2.1) X_t est lisse pour tout t contenu dans un ouvert non vide de \mathbb{P}^1 ,

(3.2.2) Si X_t est singulier, elle n'a que des singularités quadratiques non dégénérées (XVII 1.1) ;

ces conditions sont vérifiées en particulier pour un pinceau de Lefschetz (XVII 2.21) si car $k \neq 2$ ou si X est de dimension paire.

Soient η le point générique de \mathbb{P}^1 , $\bar{\eta}$ un point géométrique au-dessus, n la dimension de X , et χ la caractéristique d'Euler-Poincaré à valeurs dans le faisceau \mathcal{O}_λ . Alors la formule d'Euler-Poincaré XVI 2.1 appliquée au morphisme S , nous donne

$$(3.2.3) \quad \chi(\tilde{X}) = \chi(\mathbb{P}^1) \chi(X_{\bar{\eta}}) + (-1)^\eta \sum_{\substack{\text{pts sing.} \\ \text{des fibres}}} 1 \quad ,$$

formule qui, compte tenu de (2.2.2), se récrit

$$(3.2.4) \quad (-1)^\eta \left[\begin{array}{l} \text{nombre total des} \\ \text{points singuliers} \end{array} \right] = \chi(X) + \chi(\Delta) - 2 \chi(X_{\bar{\eta}})$$

On remarquera que la quantité $\chi(X) + \chi(\Delta) - 2\chi(X_{\bar{\eta}})$ est indépendante du choix particulier du pinceau, et ne dépend que du plongement de X dans un \mathbb{P}^r , et même seulement de la classe de Chern de $\underline{\mathcal{O}}_X(1)$, cf. [XVII, 5.7.5 et 5.7.6].

3.2.5. Explicitons ceci dans un cas concret. Prenons $X = \mathbb{P}^2$, $\{H_\tau\}$ un pinceau de courbes de degré d dans \mathbb{P}^2 qui vérifie (3.1), (3.2.1) et (3.2.2). On a

$$\begin{aligned} \chi(X) &= 3 && \text{(en vertu de 1.2)} \\ (3.2.6) \quad \chi(X_{\overline{\eta}}) &= -d(d-3) && \text{(cf. SGA 5 VII 7.3)} \\ \chi(\Delta) &= d^2 \quad , \end{aligned}$$

d'où

$$(3.2.7) \quad \text{le nombre total de points singuliers est } 3(d-1)^2$$

Prenons le cas particulier $d = 3$, et considérons la famille des courbes elliptiques (en caractéristique $\neq 3$)

$$(3.2.8) \quad X^3 + Y^3 + Z^3 + 3\mu XYZ \quad .$$

Les quatre fibres singulières sont au-dessus de $\mu =$ racine cubique de l'unité, et $\mu = \infty$, et chaque fibre singulière est l'union de trois droites comme ceci

$$(3.2.9) \quad \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \end{array} \quad ,$$

et a exactement trois points singuliers, tous quadratiques non-dégénérés. Cela fait ensemble douze points singuliers, et vérifie (3.2.7) dans cet exemple.

Proposition 3.2.10. Soit $X \hookrightarrow \mathbb{P}^r$ un plongement de Lefschetz (XVII 2.3),
et supposons que $n = \dim X$ soit pair, ou que $\text{car. } k \neq 2$. Alors tout
pinceau de Lefschetz, considéré comme droite dans \mathbb{P}^r , coupe \check{X} en

$$(3.2.11) \quad (-1)^\eta [\chi(X) + \chi(\Delta) - 2 \chi(X_\tau)]$$

points, et le coupe transversalement (EGA IV 17.13.7).

Démonstration. Par hypothèse, toute singularité d'une fibre du pinceau de Lefschetz est quadratique non-dégénérée, de sorte que (3.2.4) s'applique pour donner que le nombre des fibres singulières (chacune contenant exactement un point singulier) dans le pinceau D est le nombre (3.2.11). Or, la fibre X_τ est singulière si et seulement si $\tau \in \check{X} \cap D$. Pour voir la transversalité de l'intersection, on remarque que le nombre (3.2.11) est indépendant du choix particulier du pinceau de Lefschetz, et que, le pinceau générique étant un pinceau de Lefschetz, ce nombre (3.2.11) est le degré de \check{X} (i.e. son degré comme hypersurface dans \mathbb{P}^r , qui est (par convention) 0 si $\dim \check{X} \leq r-2$). Or, si une droite D coupe une hypersurface de degré $d > 0$ en d points distincts x_i ($1 \leq i \leq d$), l'intersection est forcément transversale. En effet, la multiplicité d'intersection $\mu_i = \text{rg}(D \cap \check{X}|_{x_i})$ de D et \check{X} en un x_i est ≥ 1 , donc comme $\sum^d \mu_i = d$, on a $\mu_i = 1$, pour tout i , i.e. $D \cap \check{X}$ est lisse, ce qui, équivaut à la transversalité, comme on voit aussitôt.

Remarque 3.2.12. Pour un pinceau de Lefschetz D dont on suppose déjà qu'il coupe X transversalement (condition vérifiée en tous cas pour D assez générale), le résultat 3.2.10 peut être considéré aussi comme la conjonction de XVII 5.7.2 et du fait que $\deg \varphi = 1$, contenu dans XVII 3.5. Bien entendu, le fait que tout pinceau de Lefschetz D coupe X transversalement, établi ici via la formule d'Euler-Poincaré XVI 2.1, peut aussi se vérifier directement de façon élémentaire, en utilisant le fait que l'axe de D coupe X transversalement.

4. La cohomologie de l'éclatement associé à un pinceau

4.1. Nous reprenons la situation 3.1, résumée par le diagramme commutatif (cf. 2.1.6.3) :

(4.1.1)

$$\begin{array}{ccccc}
 X \times \mathbb{P}^1 & \xleftarrow{f \times \rho} & \tilde{X} & \xleftarrow{i} & \tilde{\Delta} & \xrightarrow{(g, \rho_i)} & \Delta \times \mathbb{P}^1 \\
 & \searrow \rho & \downarrow f & & \downarrow g & & \\
 \mathbb{P}^1 & & X & \xleftarrow{i} & \Delta & & .
 \end{array}$$

Commençons par préciser (2.2.2) dans ce cas.

Proposition 4.2. Sous les hypothèses de 3.1:

(4.2.1) Les homomorphismes de \mathbb{Z}_ℓ -modules

$$\begin{array}{ccc}
 H^*(\tilde{X}, \mathbb{Z}_\ell) & \xrightleftharpoons[f^* + \text{ind}]{f_* \oplus (1 - f_* f_*)} & H^*(X, \mathbb{Z}_\ell) \oplus \text{Ker}(f_* : H^*(\tilde{X}, \mathbb{Z}_\ell) \rightarrow H^*(X, \mathbb{Z}_\ell)) \\
 & & \downarrow \\
 & & \mathbb{Z}_\ell \oplus \mathbb{Z}_\ell
 \end{array}$$

sont des isomorphismes, inverses l'un de l'autre.

(4.2.2) Les homomorphismes de \mathbb{Z}_ℓ -modules

$$H^*(\tilde{X}, \mathbb{Z}_\ell) \begin{array}{c} \xrightarrow{f_* \oplus (g_* i^*)} \\ \xleftarrow{f^* + i_* g^*} \end{array} H^*(X, \mathbb{Z}_\ell) \oplus H^{*-2}(\Delta, \mathbb{Z}_\ell(-1))$$

sont des isomorphismes, inverses l'un de l'autre.

(4.2.3) La structure d'algèbre sur $H^*(X, \mathbb{Z}_\ell) \oplus H^{*-2}(\Delta, \mathbb{Z}_\ell(-1))$ déduite par "transport de structure" par (4.2.2) du cup-produit dans $H^*(\tilde{X}, \mathbb{Z}_\ell)$, s'exprime, en termes des éléments

$$a, b \in H^*(X, \mathbb{Z}_\ell) \quad , \quad x, y \in H^{*-2}(\Delta, \mathbb{Z}_\ell(-1)) \quad ,$$

par les formules :

$$(4.2.3.1) \quad (0 \oplus x) \wedge (0 \oplus y) = -j_*(xy) \oplus 2xy \cdot c_1(\underline{O}_\Delta(1)) \quad ,$$

$$(4.2.3.2) \quad (a \oplus 0) \wedge (b \oplus 0) = ab \oplus 0 \quad ,$$

$$(4.2.3.3) \quad (a \oplus 0) \wedge (0 \oplus y) = 0 \oplus j^*(a)y \quad ,$$

$$(4.2.3.4) \quad (0 \oplus x) \wedge (b \oplus 0) = 0 \oplus xj^*(b) \quad .$$

En particulier, pour

$$a \oplus x \in H^*(X, \mathbb{Z}_\ell) \oplus H^{*-2}(\Delta, \mathbb{Z}_\ell(-1))$$

$$b \oplus y \in H^{2n-*}(X, \mathbb{Z}_\ell) \oplus H^{2n-2-*}(\Delta, \mathbb{Z}_\ell(-1)) \quad ,$$

on a

$$(4.2.3.5) \quad (a \oplus x) \wedge (b \oplus y) = ab - j_*(xy) \quad .$$

Autrement dit, la matrice d'intersection totale de $H^*(\tilde{X}, \mathbb{Z}_\ell)$

s'écrit :

$$\left(\begin{array}{c|c} \text{(la matrice totale des intersections sur } X) & 0 \\ \hline 0 & - \text{(la matrice totale des intersections sur } \Delta) \end{array} \right) .$$

Démonstration. On a déjà démontré (4.2.1) ; (cf. 2.2.22)). Pour (4.2.2), remarquons d'abord que, $g : \tilde{\Delta} \rightarrow \Delta$ étant un fibré projectif de rang un, la suite

$$(4.2.4) \quad 0 \rightarrow H^*(\Delta, \mathbb{Z}_\ell) \xrightarrow{g^*} H^*(\tilde{\Delta}, \mathbb{Z}_\ell) \xrightarrow{g_*} H^{*-2}(\Delta, \mathbb{Z}_\ell(-1)) \rightarrow 0$$

est exacte (cf. (1.2.2)). Compte tenu de (2.2.26), on obtient le diagramme commutatif de suites exactes

$$(4.2.5) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^*(X, \mathbb{Z}_\ell) & \xrightarrow{f^*} & H^*(\tilde{X}, \mathbb{Z}_\ell) & \xrightarrow{g_* i^*} & H^{*-2}(\Delta, \mathbb{Z}_\ell(-1)) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow j^* & & \downarrow i^* & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & H^*(\Delta, \mathbb{Z}_\ell) & \xrightarrow{g^*} & H^*(\tilde{\Delta}, \mathbb{Z}_\ell) & \xrightarrow{g_*} & H^{*-2}(\Delta, \mathbb{Z}_\ell(-1)) \longrightarrow 0 \end{array} .$$

Compte tenu du scindage (4.2.1), ceci donne un isomorphisme

$$(4.2.6) \quad f_* \oplus g_* i^* : H^*(\tilde{X}, Z_\lambda) \xrightarrow{\sim} H^*(X, Z_\lambda) \oplus H^{*-2}(\Delta, Z_\lambda(-1)) .$$

Le transposé de (4.2.5) donne un diagramme commutatif de suites

exactes (après le décalage, $\xrightarrow{\sim} 2n-$.)

$$(4.2.7) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \leftarrow & H^*(X, Z_\lambda) & \xleftarrow{f_*} & H^*(\tilde{X}, Z_\lambda) & \xleftarrow{i_* g_*} & H^{*-2}(\Delta, Z_\lambda(-1)) \leftarrow 0 \\ & & \uparrow j_* & & \uparrow i_* & & \\ 0 & \leftarrow & H^{*-2}(\Delta, Z_\lambda(-2)) & \xleftarrow{g_*} & H^{*-2}(\tilde{\Delta}, Z_\lambda(-1)) & \xleftarrow{g_*} & H^{*-2}(\Delta, Z_\lambda(-1)) \leftarrow 0 \end{array}$$

et on obtient un isomorphisme

$$(4.2.8) \quad H^*(X, Z_\lambda) \oplus H^{*-2}(\Delta, Z_\lambda(-1)) \xrightarrow{f_* + i_* g_*} H^*(\tilde{X}, Z_\lambda) .$$

Il reste à démontrer que le composé

$$(4.2.9) \quad H^*(X, Z_\lambda) \oplus H^{*-2}(\Delta, Z_\lambda(-1)) \xrightarrow{f_* + i_* g_*} H^*(\tilde{X}, Z_\lambda) \xrightarrow{f_* \oplus (g_* i^*)} H^*(X, Z_\lambda) \oplus H^{*-2}(\Delta, Z_\lambda(-1))$$

est l'identité. Or, on a

$$f_* f^* = \text{id sur } H^*(X, Z_\lambda) , \text{ par (2.2.18)}$$

$$g_* i^* f^* = 0 \quad \text{par (4.2.5)}$$

$$f_* i_* g_*^* = 0 \quad \text{par (4.2.7) ,}$$

de sorte qu'il suffit de démontrer

$$(4.2.10) \quad g_* i^* i_* g_*^*(X) = X \text{ pour } X \in H^*(\Delta, Z_\lambda(-1)) .$$

Pour vérifier (4.2.10), remarquons d'abord que $i : \tilde{\Delta} \hookrightarrow \tilde{X}$ étant l'inclusion d'une sous-variété lisse de codimension un, on a [SGA 5 VII]

$$(4.2.11) \quad i_* i_*(x) = c_1(N_{\tilde{\Delta}/\tilde{X}}) \cdot x$$

$$(4.2.12) \quad i_*(x) i_*(y) = i_*(xy \cdot c_1(N_{\tilde{\Delta}/\tilde{X}})) \quad .$$

Ecrivons $\xi_X = \mathcal{O}_X(1)$, $\xi_\Delta = \mathcal{O}_\Delta(1)$, $\xi_{\mathbb{P}^1} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$, etc .

En vertu de EGA II 8.1.7, on a, si $\tilde{\mathfrak{I}}$ est l'idéal $\tilde{\Delta}$ dans \tilde{X}

$$(4.2.13) \quad \check{N}_{\tilde{\Delta}/\tilde{X}} \simeq \tilde{\mathfrak{I}}/\tilde{\mathfrak{I}}^2 \simeq \tilde{\mathfrak{I}} \otimes_{\mathcal{O}_{\tilde{X}}} \mathcal{O}_{\tilde{\Delta}} \simeq \mathcal{O}_{\tilde{X}}(1) \otimes_{\mathcal{O}_{\tilde{X}}} \mathcal{O}_{\tilde{\Delta}} = \mathcal{O}_{\tilde{\Delta}}(1) \quad ,$$

où $\tilde{\Delta}$ est interprété comme $\mathbb{P}(\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2)$, \mathfrak{I} étant l'idéal de Δ dans X . Or on a un isomorphisme canonique (Δ étant représenté comme intersection de X avec deux hyperplans donnés dans \mathbb{P}^\vee),

$$\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2 \simeq \mathcal{O}_\Delta^2(-1) \quad ,$$

qui donne naissance à l'isomorphisme

$$\tilde{\Delta} = \mathbb{P}(\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2) \simeq \mathbb{P}(\mathcal{O}_\Delta^2(-1)) \xrightarrow{\alpha} \mathbb{P}(\mathcal{O}_\Delta^2) \simeq \Delta \times \mathbb{P}^1$$

où α est l'isomorphisme canonique EGA II 4.1.4. Par loc. cit. cet isomorphisme transforme

$$\mathcal{O}_{\tilde{\Delta}}(1) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2)}(1) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{O}_\Delta^2(-1))}(1) \text{ en } \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{O}_\Delta^2)}(1) \otimes_{\mathcal{O}_\Delta} \mathcal{O}_\Delta(-1) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \otimes_{\mathbb{K}} \mathcal{O}_\Delta(-1),$$

de sorte que (4.2.13) s'écrit

$$(4.2.14) \quad \check{N}_{\tilde{\Delta}/\tilde{X}} \simeq (\rho^!)*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)) \otimes g^*(\mathcal{O}_\Delta(-1)) \quad ,$$

d'où en prenant le c_1 des deux membres, le

Lemme 4.3. On a

$$c_1(N_{\tilde{\Delta}/\tilde{X}}) = g^*(\xi_{\Delta}) - (\rho_1)^*(\xi_{\mathbb{P}^1}) \quad .$$

Reprenons la démonstration de (4.2.10). D'après (4.2.11) et (4.3),

il suffit de démontrer

$$g_*(g^*(x)[(\rho_1)^*(c_1(\xi_{\mathbb{P}^1})) - g^*(c_1(\xi_{\Delta}))]) = x \quad .$$

Or, d'après (4.2.4), $g_*g^* = 0$, et, compte tenu de ce que

$$\tilde{\Delta} \xrightarrow{g \times \rho_1} \Delta \times \mathbb{P}^1 \quad ,$$

on a

$$(4.3.1) \quad g_*(g^*(x) (\rho_1)^*(c_1(\xi_{\mathbb{P}^1}))) = x$$

$$(4.3.2) \quad g_*(g^*(x) c_1(N_{\tilde{\Delta}/\tilde{X}})) = -x \quad .$$

Calculons maintenant la structure d'algèbre sur $H^*(X, \mathbb{Z}_\ell) \oplus H^{*-2}(\Delta, \mathbb{Z}_\ell(-1))$,

déduite du cup-produit par transport de structure via (4.2.2). Soient

a, b des éléments de $H^*(X, \mathbb{Z}_\ell)$, x, y des éléments de $H^{*-2}(\Delta, \mathbb{Z}_\ell(-1))$.

Commençons par (4.2.3.1).

$$(0 \oplus x) \wedge (0 \oplus y) = ? \oplus ?'$$

$$? = f_*(i_*g^*(x))(i_*g^*(y))$$

$$= f_*(i_*(g^*(xy) c_1(N_{\tilde{\Delta}/\tilde{X}}))) \quad \text{par (4.2.12)}$$

$$= j_*g_*(g^*(xy) c_1(N_{\tilde{\Delta}/\tilde{X}}))$$

$$= j_*(-xy) \quad \text{par (4.3.2) .}$$

$$\begin{aligned} ?' &= -g_* i^*(i_* g^*(x) \wedge i_* g^*(y)) \\ &= -g_* i^*(i_*(g^*(xy) c_1(N_{\Delta/\tilde{X}}))) \quad \text{par (4.3.2)} \\ &= -g_*(g^*(xy)(c_1(N_{\Delta/\tilde{X}}))^2) \quad \text{par (4.3.2)} \quad , \end{aligned}$$

or,

$$\begin{aligned} (c_1(N_{\Delta/\tilde{X}}))^2 &= (g_* c_1(O_{\Delta}(1))) - (\rho i)^*(c_1(\xi_{\mathbb{P}^1}))^2 \quad \text{par (4.3)} \\ &= g_*((c_1(\xi_{\Delta}))^2) - 2g_*(c_1(\xi_{\Delta}))(\rho i)^*(c_1(\xi_{\mathbb{P}^1})) \\ &\quad (+ (\rho i)^*((c_1(\xi_{\mathbb{P}^1}))^2) = 0) \quad , \end{aligned}$$

$$?' = -g_*(g^*(xy)g^*(c_1(\xi_{\Delta})^2)) + g_*(2g^*(xy)g^*(c_1(\xi_{\Delta}))(\rho i)^*(c_1(\xi_{\mathbb{P}^1})))$$

$$? = 0 + 2xy c_1(\xi_{\Delta}) \quad \text{par (4.2.4) et (4.3.1)} \quad ,$$

ce qui établit (4.2.3.1). Quant à (4.2.3.2) : $(a \oplus 0) \wedge (b \oplus 0) = ab \oplus 0$, ceci exprime que f^* est un homomorphisme d'algèbres.

Prouvons (4.2.3.3). Or, la formule de projection implique $\text{Ker } f_* \cap \text{image } f^* \subset \text{Ker } f_*$, de sorte que

$$(a \oplus 0) \wedge (0 \oplus y) = 0 \oplus ? \quad ,$$

où

$$(4.3.3) \quad ? = -g_* i^*(f^*(a) i_* g^*(y))$$

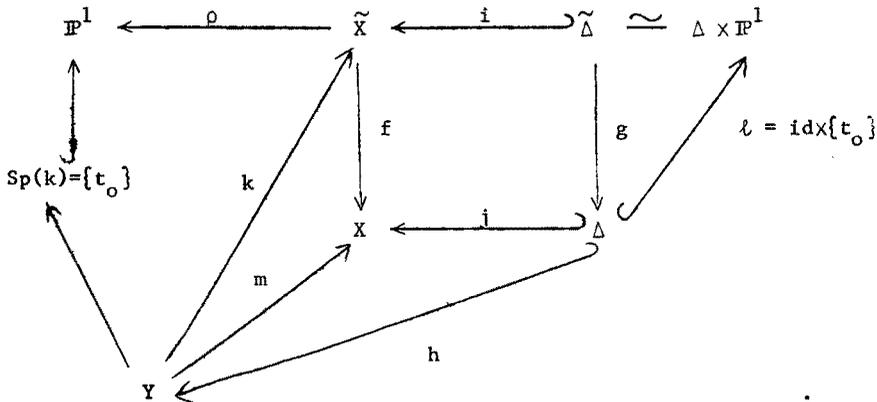
$$\begin{aligned}
 &= - g_*(i^*f^*(a) g^*(y) c_1(N_{\tilde{\Delta}/\tilde{X}})) \quad \text{par (4.3.2)} \\
 &= - g_*(g^*(j^*(a)) g^*(y) c_1(N_{\tilde{\Delta}/\tilde{X}})) \\
 &= j^*(a).y
 \end{aligned}$$

ce qui établit (4.2.3.3). On remarque enfin que (4.2.3.4) se déduit de (4.2.3.3) par l'anticommutativité du cup-produit.

5. Etude cohomologique du morphisme $\rho : \tilde{X} \rightarrow \mathbb{P}^1$ associé à un pinceau

5.1. L'homomorphisme de restriction $H^*(\tilde{X}) \rightarrow H^*(Y)$.

Désignons par Y une des fibres lisses de $\rho : \tilde{X} \rightarrow \mathbb{P}^1$, disons $Y = \rho^{-1}(t_0) = X.H_{t_0}$. On a le diagramme commutatif



Proposition 5.1.1. Sous les hypothèses de (3.1), Y désignant une fibre lisse :

(5.1.2) L'homomorphisme restriction

$$k^* : H^*(\tilde{X}, \mathbb{Z}_\ell) \longrightarrow H^*(Y, \mathbb{Z}_\ell)$$

s'exprime (via (4.2.2)) par

$$H^*(X, \mathbb{Z}_\ell) \oplus H^{\cdot-2}(\Delta, \mathbb{Z}_\ell(-1)) \xrightarrow{m^*+h^*} H^*(Y, \mathbb{Z}_\ell) .$$

(5.1.3) La flèche de Gysin

$$k_* : H^{\cdot-2}(Y, \mathbb{Z}_\ell(-1)) \longrightarrow H^*(\tilde{X}, \mathbb{Z}_\ell)$$

s'exprime par

$$H^{\cdot-2}(Y, \mathbb{Z}_\ell(-1)) \xrightarrow{m_* \oplus (-h^*)} H^*(X, \mathbb{Z}_\ell) \oplus H^{\cdot-2}(\Delta, \mathbb{Z}_\ell(-1)).$$

Démonstration. Les sous-schémas lisses $\tilde{\Delta}$ et Y de \tilde{X} se coupent trans-
versalement en Δ , autrement dit, le carré de schémas lisses

$$(5.1.4) \quad \begin{array}{ccc} \Delta & \xrightarrow{\ell} & \tilde{\Delta} \\ \downarrow h & & \downarrow i \\ Y & \xrightarrow{k} & \tilde{X} \end{array}$$

est cartésien, ce qui implique la formule [SGA 5, IV]

$$(5.1.5) \quad h_* \ell^* = k_* i_* \quad , \quad \ell_* h^* = i_* k_* .$$

Le composé

$$H^*(X, \mathbb{Z}_\ell) \oplus H^{*-2}(\Delta, \mathbb{Z}_\ell(-1)) \xrightarrow{f^*+i_*g^*} H^*(\tilde{X}, \mathbb{Z}_\ell) \xrightarrow{k^*} H^*(Y, \mathbb{Z}_\ell)$$

est la somme de $k^*f^* = m^*$ et de $k^*i_*g^* = h_*\ell^*g^*$ par (5.1.5), et $g.\ell = \text{id}_\Delta$, ce qui donne (5.1.2).

Le composé

$$H^{*-2}(Y, \mathbb{Z}_\ell(-1)) \xrightarrow{k_*} H^*(\tilde{X}, \mathbb{Z}_\ell) \xrightarrow{f_* \oplus (g_*i^*)} H^*(X, \mathbb{Z}_\ell) \oplus H^{*-2}(\Delta, \mathbb{Z}_\ell(-1))$$

est la somme de $f_*k_* = m_*$ et de $-g_*i^*k_* = g_*\ell_*h^* = -h^*$, ce qui donne (5.1.3).

Corollaire 5.1.6. Sous les hypothèses de 5.1.1, pour $i \leq n-1$, les images de

$$m^* : H^i(X, \mathbb{Z}_\ell) \longrightarrow H^i(Y, \mathbb{Z}_\ell)$$

et de

$$k^* : H^i(\tilde{X}, \mathbb{Z}_\ell) \longrightarrow H^i(Y, \mathbb{Z}_\ell)$$

sont égales.

Démonstration. D'après le "théorème de Lefschetz faible" sur les sections hyperplanes (SGA 5 VII 7.1), pour $i \leq n-1$ la flèche

$$(5.1.7) \quad H^{i-2}(X, \mathbb{Z}_\ell(-1)) \xrightarrow{j^*} H^{i-2}(\Delta, \mathbb{Z}_\ell(-1))$$

est un isomorphisme, de sorte que pour $i \leq n-1$, l'image de h^* est égale, grâce à (5.1.2), à la somme de celle de m^* et de celle du composé

$$H^{i-2}(X, \mathbb{Z}_\ell(-1)) \xrightarrow{j^*} H^{i-2}(\Delta, \mathbb{Z}_\ell(-1)) \xrightarrow{h^*} H^i(Y, \mathbb{Z}_\ell) \quad .$$

Or, par la formule de projection

$$\begin{aligned}
h_* j^*(x) &= h_*(h^*(m^*(x))) = m^*(x)h_*(1) = \xi_Y m^*(x) \\
&= m^*(x \xi_X) \text{ puisque } m^*(\xi_X) = \xi_Y \text{ ,}
\end{aligned}$$

d'où l'inclusion $\text{Im } k^i \subset \text{Im } m^i$, cqfd.

5.2. Le "théorème de Lefschetz vache" (LV)

5.2.1. Soit S projectif de dimension n, sur le corps k (alg. clos) muni d'un plongement projectif $S \hookrightarrow \mathbb{P}$. Désignons par

$$u \in H^2(S, \mathbb{Z}_\ell(1))$$

la "classe de cohomologie d'une section hyperplane " (de sorte que u s'obtient comme l'image réciproque par le plongement $S \hookrightarrow \mathbb{P}$ de la première classe de Chern de $\mathbb{Q}_{\mathbb{P}}(1)$, classe qui se trouve dans $H^2(\mathbb{P}, \mathbb{Z}_\ell(1))$, et désignons par

$$L_S : H^*(S, \mathbb{Q}_\ell(j)) \longrightarrow H^{*+2}(S, \mathbb{Q}_\ell(j+1))$$

l'opération "multiplication par u".

5.2.2. On dit que S (muni de u) vérifie (LV), (le "théorème de Lefschetz vache") si pour tout (ou un) entier j et tout entier i > 0, les applications

$$L_S^i : H^{n-i}(S, \mathbb{Q}_\ell(j)) \longrightarrow H^{n+i}(S, \mathbb{Q}_\ell(i+j))$$

sont des isomorphismes.

5.2.2.1. On conjecture que cette condition est vérifiée si S est lisse. C'est vrai si k est de caractéristique nulle [6], d'où on conclut, grâce au "théorème de spécialisation", SGA 4 XVI 2.2 qu'il en est de même si S, avec son plongement projectif, se remonte en caractéristique nulle. Donc on trouve que c'est vérifié pour S une intersection complète lisse. On sait également que c'est vrai pour S lisse de dimension ≤ 2 [2], et pour S une variété abélienne (soit "directement" (LIEBERMAN [4] et [2]), soit par le théorème de MUMFORD [5] qui dit qu'une variété abélienne polarisée se remonte, avec sa polarisation, en caractéristique nulle). Rappelons que pour une variété S projective, on définit pour $i \leq n$ la "partie primitive" de la cohomologie :

$$(5.2.2.2) \quad \text{Prim}^i(S, \mathcal{O}_\lambda(j)) = \text{Ker} (L^{n-i+1} : H^i(S, \mathcal{O}_\lambda(j)) \rightarrow H^{2n-i+2}(S, \mathcal{O}_\lambda(j+2n-2i+2))).$$

Si S vérifie (LV), on a pour $i \leq n$ la décomposition :

$$(5.2.2.3) \quad H^i(S, \mathcal{O}_\lambda(j)) \xleftarrow{\sim} \text{Prim}^i(S, \mathcal{O}_\lambda(j)) \oplus H^{i-2}(S, \mathcal{O}_\lambda(j-1)) \quad .$$

Proposition 5.2.3. Soit X projectif et lisse, vérifiant (LV). Désignons par $\tau : Y \hookrightarrow X$ l'inclusion d'une section hyperplane lisse. Alors

$$(5.2.3.1) \quad \text{Prim}^n(X, \mathcal{O}_\lambda(j)) = \text{Ker}(\tau^* : H^n(X, \mathcal{O}_\lambda(j)) \rightarrow H^n(Y, \mathcal{O}_\lambda(j))) \quad .$$

Démonstration. On a, grâce à la formule de projection pour $m : Y \rightarrow X$, le diagramme commutatif

$$(5.2.3.2) \quad \begin{array}{ccc} H^n(X, Q_\lambda(j)) & \xrightarrow{L} & H^{n+2}(X, Q_\lambda(j+1)) \\ & \searrow \tau^* & \swarrow \tau_* \\ & & H^n(Y, Q_\lambda(j)) \end{array}$$

Par dualité et Lefschetz faible,

$$\tau_* : H^n(Y, Q_\lambda(j)) \longrightarrow H^{n+2}(X, Q_\lambda(j+1))$$

est la transposée d'une isomorphisme, donc un isomorphisme, d'où la conclusion.

Lemme 5.2.4. Soient X projectif et lisse, et $\tau : Y \hookrightarrow X$ l'inclusion d'une section hyperplane lisse. Alors X vérifie (LV) si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées.

5.2.4.1. Y vérifie (LV) .

5.2.4.2. La restriction du cup-produit $H^{n-1}(Y, Q_\lambda)$ au sous-espace $\text{Im } H^{n-1}(X, Q_\lambda)$ est une forme non-dégénérée.

Démonstration. On a

$$(5.2.4.3) \quad \begin{cases} L_X = \tau_* \tau^* \\ L_Y = \tau^* \tau_* \quad (\text{par 4.2.11}), \end{cases}$$

de sorte que

$$(5.2.4.4) \quad L_X^{i+1} = \tau_* L_Y^i \tau^* .$$

Dans le diagramme commutatif

$$(5.2.4.5) \quad \begin{array}{ccc} H^{n-i-1}(X, \mathcal{Q}_\ell(j)) & \xrightarrow{L_X^{i+1}} & H^{n+i+1}(X, \mathcal{Q}_\ell(j+i+1)) \\ \downarrow \tau^* & & \uparrow \tau_* \\ H^{n-1-i}(Y, \mathcal{Q}_\ell(j)) & \xrightarrow{L_Y^i} & H^{n-1+i}(Y, \mathcal{Q}_\ell(j+i)) \end{array}$$

on sait que τ^* est un isomorphisme pour $i \geq 1$ par "Lefschetz faible", et que τ_* l'est par dualité. Donc X vérifie (LV) si et seulement si Y vérifie (LV), et la flèche

$$(5.2.4.6) \quad L_X : H^{n-1}(X, \mathcal{Q}_\ell(j)) \longrightarrow H^{n+1}(X, \mathcal{Q}_\ell(j+1))$$

est un isomorphisme. Pour achever la démonstration, il suffit de voir l'équivalence de 5.2.4.2 et 5.2.4.6. Pour ceci, soit $a, b \in H^{n-1}(X, \mathcal{Q}_\ell(j))$.

Par la dualité de Poincaré sur X, (5.2.4.6) équivaut à :

(5.2.4.7) La forme bilinéaire

$$H^{n-1}(X, \mathcal{Q}_\ell(j)) \times H^{n-1}(X, \mathcal{Q}_\ell(j)) \longrightarrow H^{2n}(X, \mathcal{Q}_\ell(2j+2))$$

$$(a, b) \longmapsto a \cdot L_X(b)$$

est non-dégénérée.

Mais par (5.2.5) et la formule de projection, on a

$$a.L_X(b) = a.\tau_*(\tau^*(b)) = \tau_*(\tau^*(a).\tau^*(b)),$$

d'où l'équivalence de (5.2.4.7) et (5.2.4.2).

Corollaire 5.2.5. Soient X projectif et lisse, de dimension n, et
 $\tau : Y \hookrightarrow X$ l'inclusion d'une section hyperplan lisse. Supposons que
X satisfait à la condition (LV). Alors pour $i \geq n$, la flèche

$$\tau^* : H^i(X, \mathcal{O}_X(j)) \longrightarrow H^i(Y, \mathcal{O}_Y(j))$$

est surjective.

Démonstration. Par (5.2.4.3), on a, pour $i \geq 0$

$$L_Y^{i+1} = \tau^* L_X^i \tau_* ,$$

d'où le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^{n-i}(X, \mathcal{O}_X(j+1)) & \xrightarrow{L_X^i} & H^{n-i}(X, \mathcal{O}_X(j+i+1)) \\ \uparrow \tau_* & & \downarrow \tau_* \\ H^{n-i-2}(Y, \mathcal{O}_Y(j)) & \xrightarrow{L_Y^{i+1}} & H^{n-i}(Y, \mathcal{O}_Y(j+i+1)) \end{array}$$

ce qui donne le résultat voulu, *cqfd.*

Lemme 5.2.6. Soit $f : F \longrightarrow B$ un morphisme propre et lisse, avec B connexe. Désignons par $\mathcal{O}_F(1)$ un module relativement ample sur F , et munissons chaque fibre géométrique F_b du module ample induit par $\mathcal{O}_F(1)$. Alors, si une des fibres géométriques satisfait la condition (LV), il en est de même pour toutes les autres.

Démonstration. Notons par $\xi_F \in H^2(F, \mathbb{Z}_\ell(1))$ la première classe de Chern de $\mathcal{O}_F(1)$. Cette classe, et ses puissances $\xi_F^i \in H^{2i}(F, \mathbb{Z}_\ell(i))$ induisent des endomorphismes par cup-produit

$$(5.2.6.1) \quad \xi_F^i : R_{f_*}^{n-i} \mathcal{Q}_\ell(j) \longrightarrow R_{f_*}^{n+i} \mathcal{Q}_\ell(j+i)$$

où n désigne la dimension relative des fibres. Par le théorème de changement de base pour un morphisme propre [SGA 4 XII 5.2], toutes les fibres géométriques satisfont à la condition (LV) si et seulement si toutes les flèches (5.2.6.1) sont des isomorphismes. Or, par le théorème de spécialisation [SGA 4 XVI 2.2], les faisceaux $R^i f_* \mathcal{Q}_\ell(j)$ sont constants tordus, de sorte que les flèches (5.2.6.1) sont des isomorphismes si et seulement ils le sont au-dessus d'un point géométrique donné, *cqfd*.

Corollaire 5.2.7. Soit X projective et lisse. Si une section hyperplane lisse vérifie (LV), il en est de même pour toute section hyperplane lisse.

Démonstration. En effet, la famille universelle des sections hyperplanes lisses de X vérifie les hypothèses de 5.2.5.

5.3. La condition (A).

5.3.1. Soit

$$\rho : \tilde{X} \longrightarrow \mathbb{P}^1$$

la "fibration" associée à un pinceau dont l'axe coupe transversalement X, et dont la fibre générique est supposée lisse.

Désignons par U un ouvert non-vide de \mathbb{P}^1 au-dessus duquel ρ soit lisse, et par

$$(5.3.1.1) \quad \nu : U \hookrightarrow \mathbb{P}^1$$

l'inclusion. Compte tenu de ce que les faisceaux $R_{\rho^*}^i(\mathcal{Q}_\ell(j))$ sont constants tordus au-dessus de U, on voit que les faisceaux

$$\nu_* \nu^* R_{\rho^*}^i(\mathcal{Q}_\ell(j))$$

sont essentiellement indépendants du choix de U, et que les homomorphismes canoniques "d'adjonction"

$$(5.3.2) \quad R_{\rho^*}^i \mathcal{Q}_\ell(j) \longrightarrow \nu_* \nu^* R_{\rho^*}^i(\mathcal{Q}_\ell(j))$$

sont aussi indépendants du choix de U.

5.3.3. Remarquons que pour un pinceau quelconque de sections hyperplanes, le théorème de Lefschetz faible implique que pour $i \leq n-2$, l'immersion $\tilde{X} \xrightarrow{(f, \rho)} X \times \mathbb{P}^1$ donne lieu à un isomorphisme de faisceaux sur \mathbb{P}^1

$$R_{\rho^*}^i \mathcal{Q}_\ell(j) \xleftarrow{\sim} H^i(X, \mathcal{Q}_\ell(j))_{\mathbb{P}^1}, \quad i \leq n-2$$

i.e. $R^i_{\rho_*} Q_\ell(j)$ est un faisceau constant pour $i \leq n-2$ et, a fortiori, les flèches (5.3.2) sont des isomorphismes pour $i \leq n-2$.

5.3.4. On sait, par la théorie locale des cycles évanescents et notamment la formule de Picard-Lefschetz (XV 3.4), que, pour un pinceau de Lefschetz, les homomorphismes 5.3.2 sont des isomorphismes pour $i \neq n$, et sont surjectifs pour $i = n$.

5.3.5. On dit que ρ , ou le pinceau dont il provient, vérifie la condition (A), si tous les homomorphismes (5.3.2) sont des isomorphismes (ou, ce qui revient au même, s'ils le sont pour tout i , et $j = 0$).

On verra plus bas (6.3, 6.4) que cette condition (A) a une nette tendance à être vérifiée.

Lemme 5.4. Si une des sections hyperplanes lisses de X (donc toute, par 5.2.7) vérifie (LV) (p.ex. si X vérifie (LV), cf. (5.2.4)), et si ρ vérifie l'hypothèse (A), alors toute fibre (y compris toute fibre singulière) vérifie (LV), et les faisceaux $R^i_{\rho_*}(Q_\ell(j))$ sont constants pour $i \neq n-1$.

Démonstration. Désignons par

$$L : R^i_{\rho_*}(Q_\ell(j)) \longrightarrow R^{i+2}_{\rho_*}(Q_\ell(j+1))$$

le morphisme multiplication par $f^*c_1(\mathcal{O}_X(1)) \in H^2(\tilde{X}, \mathbb{Z}_\ell(1))$; fibre par fibre, c'est l'opération envisagée dans (5.2.1). Par hypothèse, on a

un isomorphisme au-dessus de U

$$(5.4.1) \quad v^*(L^i) : v^*R^{n-1-i} \rho_*(Q_\ell(j)) \xrightarrow{\sim} v^*R^{n-1+i} \rho_*(Q_\ell(j+i))$$

pour $i > 0$, tout j . Appliquant le foncteur v_* , on obtient des

isomorphismes

$$(5.4.2) \quad (v_*v^*) L^i : v_*v^* R^{n-1-i} \rho_*(Q_\ell(j)) \xrightarrow{\sim} v_*v^* R^{n-1+i} \rho_*(Q_\ell(j+i)),$$

qui, compte tenu de (A) s'identifient aux morphismes

$$(5.4.3) \quad L^i : R^{n-1-i} \rho_*Q_\ell(j) \xrightarrow{\sim} R^{n-1+i} \rho_*Q_\ell(j+i) .$$

On conclut par 5.3.3.

5.4.4. Désignons par Y une fibre lisse de $\rho : \tilde{X} \longrightarrow \mathbb{P}^1$. Par

"Lefschetz faible", la flèche de restriction

$$H^{n-1}(X, Q_\ell(j)) \xrightarrow{m^*} H^{n-1}(Y, Q_\ell(j))$$

est injectif, et on a vu (5.2.4) que, si X vérifie (LV), le cup-produit

sur $H^{n-1}(Y, Q_\ell(j))$, restreint à $m^* H^{n-1}(X, Q_\ell(j))$, reste non dégénéré.

L'orthogonal de $H^{n-1}(X, Q_\ell(j))$ dans $H^{n-1}(Y, Q_\ell(j))$ est donc un sous-espace

complémentaire de $H^{n-1}(X, Q_\ell(j))$ dans $H^{n-1}(Y, Q_\ell(j))$, qu'on appelle,

suyvant la terminologie classique, l'espace de cohomologie évanescence

de Y. On définit un sous-faisceau correspondant de $v_*(R^{n-1} \rho_*Q_\ell(j))$,

où $v : U \longrightarrow \mathbb{P}^1$ est un ouvert de lissité $\neq \emptyset$ de ρ , le "faisceau de

cohomologie évanescence" $E^{n-1} \rho_*Q_\ell(j)$ sur \mathbb{P}^1 , par

$$(5.4.4.1) \quad E^{n-1}_{\rho_* \mathcal{Q}_\ell(j)} = \nu_* \left\{ \begin{array}{l} \text{l'orthogonal dans } \nu^* R^{n-1}_{\rho_* \mathcal{Q}_\ell(j)} \text{ du} \\ \text{sous-faisceau constant } H^{n-1}(X, \mathcal{Q}_\ell(j))_U \end{array} \right\} .$$

Il est clair que ce faisceau est indépendant du choix de U .

Lemme 5.5. Si X vérifie (LV) et si les flèches (5.3.2) sont des isomorphismes pour $i = n - 1$, par exemple si ρ provient d'un pinceau de Lefschetz (cf. (5.3.4)), on a une décomposition en somme directe

$$(5.5.1) \quad R^{n-1}_{\rho_* \mathcal{Q}_\ell(j)} \simeq H^{n-1}(X, \mathcal{Q}_\ell(j))_{\mathbb{P}^1} \oplus E^{n-1}_{\rho_* \mathcal{Q}_\ell(j)} .$$

Démonstration. Par (LV), on a une telle décomposition au-dessus de U :

$$(5.5.2) \quad \nu^* R^{n-1}_{\rho_* \mathcal{Q}_\ell(j)} \simeq H^{n-1}(X, \mathcal{Q}_\ell(j))_U \oplus \nu^* E^{n-1}_{\rho_* \mathcal{Q}_\ell(j)},$$

à laquelle on applique ν_* .

Théorème 5.6. Soit X une variété projective, lisse et irréductible qui vérifie (LV) (5.2.2). Soit $\{H_\tau\}$ un pinceau d'hyperplans dont l'élément générique et l'axe coupent transversalement X , en X_η et en Δ respectivement. Supposons que la projection $\rho : \tilde{X} \rightarrow \mathbb{P}^1$ vérifie la condition (5.3.2). Alors :

(5.6.1) la suite spectrale de Leray

$$E_2^{p,q} = H^p(\mathbb{P}^1, R^q_{\rho_* \mathcal{Q}_\ell}) \implies H^{m+q}(\tilde{X}, \mathcal{Q}_\ell)$$

dégénère. (NB. Ceci reste valable si, au lieu de supposer que X satisfait la condition (LV), on suppose seulement qu'une section hyperplane lisse Y satisfait.)

5.6.2. Désignons par η le point générique de \mathbb{P}^1 , par $\bar{\eta}$ le point générique géométrique, par $X_{\bar{\eta}}$ la fibre générique géométrique de ρ , et par π le groupe de Galois de $k(\bar{\eta})/k(\eta)$.

Pour $q \neq n-1$, on a des isomorphismes canoniques :

$$\begin{cases} (5.6.2.1) & E_2^{0,q} (=H^0(\mathbb{P}^1, R^q \rho_* \mathcal{Q}_\ell)) \simeq H^q(X_{\bar{\eta}}, \mathcal{Q}_\ell) \\ (5.6.2.2) & E_2^{2,q} (=H^2(\mathbb{P}^1, R^q \rho_* \mathcal{Q}_\ell)) \simeq H^q(X_{\bar{\eta}}, \mathcal{Q}_\ell(-1)) \\ (5.6.2.3) & E_2^{p,q} (=H^p(\mathbb{P}^1, R^q \rho_* \mathcal{Q}_\ell)) = 0, p \neq 0, 2 \end{cases} .$$

Pour $q = n-1$, on a

$$(5.6.2.4) \quad E_2^{0,n-1} (=H^0(\mathbb{P}^1, R^{n-1} \rho_* \mathcal{Q}_\ell)) \simeq H^{n-1}(X_{\bar{\eta}}, \mathcal{Q}_\ell)^\pi$$

$$\simeq H^{n-1}(X, \mathcal{Q}_\ell) ,$$

$$(5.6.2.5) \quad E_2^{2,n-1} (=H^2(\mathbb{P}^1, R^{n-1} \rho_* \mathcal{Q}_\ell)) \simeq H^{n-1}(X_{\bar{\eta}}, \mathcal{Q}_\ell(-1))^\pi$$

$$\simeq H^{n-1}(X, \mathcal{Q}_\ell(-1)) .$$

(On trouvera la valeur manquante $E_2^{1,n-1}$ dans 5.7 ci-dessous).

Démonstration. Le théorème 1.1 s'applique, par (5.4.3), pour donner (5.6.1). Quant aux trois premières formules (5.6.2), elles résultent du fait que les $R^q \rho_* \mathcal{Q}_\ell$ pour $q \neq n-1$ sont constants (5.4) ; pour (5.6.2.3) il faut utiliser bien sûr que \mathbb{P}^1 est simplement connexe. La première

égalité de (5.6.2.4) résulte de ce que $R^{n-1}\rho_*\mathcal{Q}_\ell \xrightarrow{\sim} \nu_*\nu^*R^{n-1}\rho_*\mathcal{Q}_\ell$, de sorte qu'on a $H^0(\mathbb{P}^1, R^{n-1}\rho_*\mathcal{Q}_\ell) \simeq H^0(U, \nu^*R^{n-1}\rho_*\mathcal{Q}_\ell)$, et de ce que $\nu^*R^{n-1}\rho_*\mathcal{Q}_\ell$ est un faisceau "constant tordu" sur U , donc équivalent au π -module $H^{n-1}(X_{\overline{\pi}}, \mathcal{Q}_\ell)$. La deuxième égalité de (5.6.2.4) résulte de la dégénérescence, compte tenu de 5.1.6.

Passons à (5.6.2.5). Désignons par F' la filtration définie sur $H^*(\tilde{X}, \mathcal{Q}_\ell)$ par la suite spectrale. Par dégénérescence, $F^2 H^{n+1}(\tilde{X}, \mathcal{Q}_\ell) = E_2^{2, n-1}$, et $gr^1 H^{n+1}(\tilde{X}, \mathcal{Q}_\ell) = E_2^{1, n} = 0$ (5.6.2.3), de sorte que (cf. 5.1.0)

$$(5.6.3) \quad E_2^{2, n-1} = F^1 H^{n+1}(\tilde{X}, \mathcal{Q}_\ell) = \text{Ker}(H^{n+1}(\tilde{X}, \mathcal{Q}_\ell) \rightarrow H^0(\mathbb{P}^1, R^{n+1}\rho_*\mathcal{Q}_\ell))$$

$$(\text{par (A)}) = \text{Ker}(k^* : H^{n+1}(\tilde{X}, \mathcal{Q}_\ell) \rightarrow H^{n+1}(X_{\overline{\pi}}, \mathcal{Q}_\ell)) \quad .$$

Par (5.1.2), k^* se récrit

$$(5.6.4) \quad H^{n+1}(X, \mathcal{Q}_\ell) \oplus H^{n-1}(\Delta, \mathcal{Q}_\ell(-1)) \xrightarrow{m^*+h_*} H^{n+1}(X_{\overline{\pi}}, \mathcal{Q}_\ell) \quad ,$$

et, par (5.2.2.3) se récrit encore

$$(5.6.5) \quad \text{Prim}^{n-1}(X, \mathcal{Q}_\ell(-1)) \oplus H^{n-3}(X, \mathcal{Q}_\ell(-2)) \oplus H^{n-1}(\Delta, \mathcal{Q}_\ell(-1)) \xrightarrow{m^*L+m^*L^2h_*} H^{n+1}(X_{\overline{\pi}}, \mathcal{Q}_\ell)$$

Or, la flèche

$$H^{n-3}(X, \mathcal{Q}_\ell(-2)) \xrightarrow{m^*L^2} H^{n+1}(X_{\overline{\pi}}, \mathcal{Q}_\ell)$$

est un isomorphisme, par (LV), car $m^*L_X^2 = L_{X_{\overline{\pi}}}^2 \cdot m^*$ (cf. (5.2.4) et (5.2.5)).

Donc le noyau de (5.6.8) s'identifie (par $pr_1 \oplus pr_3$) à

$\text{Prim}^{n-1}(X, \mathcal{O}_\ell(-1)) \oplus H^{n-1}(\Delta, \mathcal{O}_\ell(-1))$. Par (LV),

$H^{n-1}(\Delta, \mathcal{O}_\ell(-1)) \xleftarrow{\sim} H^{n-3}(\Delta, \mathcal{O}_\ell(-2)) \xleftarrow{\sim} H^{n-3}(X, \mathcal{O}_\ell(-2))$, la dernière par Lefschetz faible. Par (5.2.2.3), on a donc

$$(5.6.6) \quad E_2^{2, n-1} \simeq H^{n-1}(X, \mathcal{O}_\ell(-1)) \quad ,$$

et l'autre égalité de (5.6.2.5) se déduit en "tordant" (5.6.2.4).

Remarque 5.6.7. On peut démontrer (5.6.1) sous des hypothèses nettement plus faibles, comme DELIGNE m'a expliqué:

Théorème 5.6.8. Soient X lisse de dimension n sur un corps k algébriquement clos, et

$$\rho : X \longrightarrow \mathbb{P}_k^1$$

un morphisme projectif, dont la fibre générique est lisse. Supposons que :

(5.6.8.1) la fibre générique géométrique, munie de la restriction du module relativement ample $\mathcal{O}_X(1)$, satisfait à la condition (LV);

(5.6.8.2) les flèches (5.3.2) sont des isomorphismes pour $i \neq n$, et sont surjectives pour $i = n$ (condition satisfaite en particulier si ρ provient d'un pinceau de Lefschetz (cf. 5.3.4)). Alors, la suite spectrale de Leray

$$E_2^{p, q} : H^p(\mathbb{P}_k^1, R^q \rho_* \mathcal{O}_\ell) \implies H^{p+q}(X, \mathcal{O}_\ell)$$

dégénère.

Remarque : Le même théorème vaut, avec la même démonstration, pour \mathbb{P}_k^1 remplacé par une courbe projective lisse irréductible quelconque.

Démonstration. Nous allons identifier, pour la démonstration, le faisceau $\mathcal{O}_\ell(1)$ à \mathcal{O}_ℓ (possible car on a pris k algébriquement clos). On peut évidemment supposer X connexe, et ρ surjectif, donc plat, à fibres de dimension $n-1$. Désignons par

$$\xi_X \in H^2(X, \mathcal{O}_\ell)$$

la première classe de Chern de $\mathcal{O}_{-X}(1)$. Soit

$$v : U \longrightarrow \mathbb{P}^1$$

l'inclusion d'un ouvert de lissité de ρ . Par 5.6.8.1 et 5.2.6, les flèches de cup-produit

$$\xi_X^i : v^* R^{n-1-i} \rho_* \mathcal{O}_\ell \longrightarrow v^* R^{n-1+i} \rho_* \mathcal{O}_\ell$$

sont des isomorphismes, pour $i \geq 1$, de sorte que, en appliquant le foncteur v_* , on trouve des isomorphismes (compte tenu de 5.6.8.2) pour $i \geq 2$

$$(5.6.8.3) \quad \xi_X^i : R^{n-1-i} \rho_* \mathcal{O}_\ell \xrightarrow{\sim} R^{n-1+i} \rho_* \mathcal{O}_\ell,$$

et, pour $i = 1$, un isomorphisme

$$(5.6.8.4) \quad \xi_X : R^{n-2} \rho_* \mathcal{O}_\ell \xrightarrow{\sim} v_* v^* R^n \rho_* \mathcal{O}_\ell.$$

Cette dernière flèche se factorise en

$$(5.6.8.5) \quad R^{n-2} \rho_* \mathcal{O}_\ell \xrightarrow{\xi_X} R^n \rho_* \mathcal{O}_\ell \xrightarrow{\text{flèche d'adjonction}} v_* v^* R^n \rho_* \mathcal{O}_\ell,$$

de sorte qu'on a une décomposition canonique

$$(5.6.8.6) \quad R^n \rho_* \mathbb{Q}_\ell \xleftarrow[\sim]{\xi_X + \text{ind}} R^{n-2} \rho_* \mathbb{Q}_\ell \oplus \text{Local}^n \mathbb{Q}_\ell$$

où l'on a posé

$$(5.6.8.7) \quad \text{Local}^n \mathbb{Q}_\ell = \text{Ker}(R^n \rho_* \mathbb{Q}_\ell \longrightarrow \nu_* \nu^* R^n \rho_* \mathbb{Q}_\ell) \quad .$$

On remarque que le faisceau $\text{Local}^n \mathbb{Q}_\ell$ est concentré aux points de \mathbb{P}^1 où la fibre de ρ n'est pas lisse, de sorte que, compte tenu encore de

(5.6.8.3), on trouve

$$(5.6.8.8) \quad H^j(\mathbb{P}^1, R^{n-2-i} \rho_* \mathbb{Q}_\ell) \xrightarrow[\sim]{\xi_X} H^j(\mathbb{P}^1, R^{n-1+i} \mathbb{Q}_\ell) \quad \text{si } i, j \geq 1 .$$

Démontrons maintenant la dégénérescence. Compte tenu de ce que

$E_2^{p,q} = 0$ sauf pour $p = 0, 1, 2$, il suffit de prouver que les opérations

$$d_2 : H^0(\mathbb{P}^1, R^1 \rho_* \mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow H^2(\mathbb{P}^1, R^{1-1} \rho_* \mathbb{Q}_\ell)$$

sont nulles. Pour $q \leq n - 1$, posons

$$(5.6.8.9) \quad \text{Prim}(E_2^{p,q}) = \text{Ker}(\xi_X^{n-q} : E_2^{p,q} \longrightarrow E_2^{p, 2n-q}) \quad .$$

Grâce à (5.6.8.3) et (5.6.8.6), impliquant l'injectivité de

$$\xi_X : H^p(\mathbb{P}^1, R^{n-2} \rho_* \mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow H^p(\mathbb{P}^1, R^1 \rho_* \mathbb{Q}_\ell), \quad \text{pour } q \leq n - 1, \text{ on a}$$

$$(5.6.8.10) \quad E_2^{p,q} \xleftarrow[\sim]{1 + \xi_X + \xi_X^2 + \dots} \text{Prim}(E_2^{p,q}) \oplus \text{Prim}(E_2^{p, q-2}) \oplus \text{Prim}(E_2^{p, q-4}) .$$

Pour voir qu'on a

$$d_2^{p,q} = 0 \text{ pour } q \leq n - 1 ,$$

remarquons simplement que le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Prim}(E_2^{p,q}) & \xrightarrow{\varepsilon_X^{n-q}=0} & E_2^{p,2n-q} \\
 \downarrow d_2^{p,q} & & \downarrow d_2^{p,2n-q} \\
 E_2^{p+2,q-1} & \xrightarrow{\varepsilon_X^{n-1-(q-1)}} & E_2^{p+2,2n-q-1}
 \end{array}$$

(la flèche du bas étant un isomorphisme grâce à (5.6.8.8)), entraîne que $d_2^{p,q}$ tue $\text{Prim}(E_2^{p,q})$ pour $q \leq n - 1$, et donc, par (5.6.8.10), que d_2 tue $E_2^{p,q}$ pour $q \leq n - 1$. Par (5.6.8.3), ceci implique aussi que d_2 tue $E_2^{p,q}$ pour $q \geq n + 1$. Donc il reste à prouver que l'homomorphisme

$$d_2^{0,n} : E_2^{0,n} \longrightarrow E_2^{2,n-1}$$

est nul, ou, ce qui revient au même, que

$$(5.6.8.12) \quad \dim E_3^{2,n-1} = \dim E_2^{2,n-1} .$$

Nous avons déjà démontré qu'on a

$$(5.6.8.13) \quad \dim E_2^{p,q} = \dim E_3^{p,q} \text{ pour } (p,q) \neq (0,n), (2,n-1)$$

et, pour une raison de degrés,

$$(5.6.8.14) \quad E_3^{p,q} = E_\infty^{p,q} \text{ pour tout couple } (p,q) .$$

Par (5.6.8.14), on a

$$b_1(X) = \dim H^1(X, \mathcal{Q}_\ell) = \sum_{p+q=1} \dim E_3^{p,q} ,$$

et, compte tenu de (5.6.8.13), on a

$$(5.6.8.15) \quad b_{n-1}(X) = \dim E_2^{c,n-1} + \dim E_2^{1,n-2} + \dim E_2^{2,n-3}$$

et

$$(5.6.8.16) \quad b_{n+1}(X) = \dim E_2^{0,n+1} + \dim E_2^{1,n} + \dim E_3^{2,n-1} .$$

Par la dualité de Poincaré, on a

$$(5.6.8.17) \quad b_{n-1}(X) = b_{n+1}(X) .$$

Remarquons d'abord que, par (5.6.8.8), on a

$$\dim E_2^{1,n} = \dim E_2^{1,n-2} ,$$

de sorte que (par 5.6.8.17) la démonstration de (5.6.8.12) est terminée une fois connue

$$(5.6.8.18) \quad \dim E_2^{2,n-3} = \dim E_2^{0,n+1} ,$$

$$(5.6.8.19) \quad \dim E_2^{0,n-1} = \dim E_2^{2,n-1} .$$

Or, ces deux formules résultent de (5.6.8.2) et la dualité de Poincaré pour les fibres lisses de ρ , compte tenu du lemme suivant, appliqué à \mathbb{P}^1 et aux faisceaux $R^{n-3} \rho_* \mathcal{Q}_\ell$ et $R^{n-1} \rho_* \mathcal{Q}_\ell$.

Lemme 5.6.9. (cf. SGA 5 I § 5 et SGA 4 XVIII). Soit D une courbe propre, lisse et connexe sur un corps k algébriquement clos. Désignons par $i : \eta \rightarrow D$ l'inclusion du point générique, et par F un \mathbb{Q}_ℓ -faisceau constructible sur D tel que $F \xrightarrow{\sim} i_* i^* F$. Alors

$$H^2(D, F) \simeq H^0(D, \check{F}(-1))^\vee ,$$

où $\check{F} \simeq i_*((i^* F)^\vee)$.

Corollaire 5.6.10. (Utilise Picard-Lefschetz). Soit $\rho : \tilde{X} \rightarrow \mathbb{P}^1$ la "fibration" provenant d'un pinceau de Lefschetz, et supposons que les fibres lisses satisfont à la condition (LV). Alors

$$(5.6.10.1) \quad H^i(X_\eta, \mathbb{Q}_\ell)^\pi = \text{Im} (H^i(X, \mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow H^i(X_\eta, \mathbb{Q}_\ell)) .$$

Démonstration. Par 5.3.4. (qui utilise la formule de Picard-Lefschetz), 5.6.8 s'applique, et donne

$$H^i(X_\eta, \mathbb{Q}_\ell)^\pi = \text{Image } H^i(\tilde{X}, \mathbb{Q}_\ell) .$$

Il reste à voir que $H^i(X, \mathbb{Q}_\ell)$ et $H^i(\tilde{X}, \mathbb{Q}_\ell)$ ont la même image dans $H^i(X_\eta, \mathbb{Q}_\ell)$. Or, ceci est vrai pour $i \leq n-1$ par 5.1.6, et pour $i \geq n$ par 5.2.5.

Passons maintenant au calcul le plus important :

Théorème 5.7. Sous les hypothèses de 5.6, posant

$$E^{n-2}(\Delta, \mathbb{Q}_\ell(j)) = \text{orthogonal dans } H^{n-2}(\Delta, \mathbb{Q}_\ell(j)) \text{ de l'image de } H^{n-2}(X, \mathbb{Q}_\ell(j))$$

(partie "évanescence" de la cohomologie de Δ , cf. 5.4.4), on a une décomposition en somme directe (cf. 4.2)

$$(5.7.1) \quad E_2^{1, n-1} = H^1(\mathbb{P}^1, R^{n-1} \rho_* \mathbb{Q}_\ell) \xleftarrow{f^* + i_* g^*} \text{Prim}^n(X, \mathbb{Q}_\ell) \oplus E^{n-2}(\Delta, \mathbb{Q}_\ell(-1)) .$$

Démonstration. Par dégénérescence on a

$$E_2^{1, n-1} \simeq F^1 H^n(\tilde{X}, \mathbb{Q}_\ell) / F^{2, n}(\tilde{X}, \mathbb{Q}_\ell) .$$

On a par (A) :

$$(5.7.2) \quad F^1 H^n(\tilde{X}, \mathbb{Q}_\ell) = \text{Ker} (k^* : H^n(\tilde{X}, \mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow H^n(X_{\overline{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell)) ,$$

$$(\text{par } 5.1.2) \quad \sim \text{Ker} : (H^n(X, \mathbb{Q}_\ell) \oplus H^{n-2}(\Delta, \mathbb{Q}_\ell(-1)) \xrightarrow{m^*+h^*} H^n(X_{\overline{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell)) .$$

Par (LV), k^* se récrit encore

$$(5.7.3) \quad \text{Prim}^n(X, \mathbb{Q}_\ell) \oplus H^{n-2}(X, \mathbb{Q}_\ell(-1)) \oplus H^{n-2}(\Delta, \mathbb{Q}_\ell(-1)) \xrightarrow{m^*+m^*L+h^*} H^n(X_{\overline{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell),$$

et la flèche du milieu

$$(5.7.4) \quad H^{n-2}(X, \mathbb{Q}_\ell(-1)) \xrightarrow{m^*L} H^n(X_{\overline{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell)$$

est un isomorphisme (cf. 5.2.3 et (5.2.2.3)), de sorte que, désignant par

$$(5.7.5) \quad \mathbb{P} : H^n(X, \mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow \text{Prim}^n(X, \mathbb{Q}_\ell)$$

la projection sur la partie primitive, on a

$$(5.7.6) \quad F^1 H^n(\tilde{X}, \mathbb{Q}_\ell) \xrightarrow[\mathbb{P} f_* \oplus (-g_* 2^*)]{\sim} \text{Prim}^n(X, \mathbb{Q}_\ell) \oplus H^{n-2}(\Delta, \mathbb{Q}_\ell(-1)) .$$

Par (5.6.2.2) et dégénérescence, on a

$$(5.7.7) \quad F^2 H^n(\tilde{X}, \mathbb{Q}_\ell) \simeq E_2^{2, n-2} \simeq H^{n-2}(X_{\overline{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell(-1)) .$$

D'autre part, l'inclusion de $F^2 H^n(\tilde{X}, \mathbb{Q}_\ell) = H^{n-2}(X_{\tilde{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell(-1))$ dans $H^n(\tilde{X}, \mathbb{Q}_\ell)$ est par la flèche k_* de Gysin. (En toute rigueur, la flèche de Gysin n'est définie que comme une flèche

$$H^{i-2}(X_{\tilde{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow H^i(X \times_k \bar{\eta}, \mathbb{Q}_\ell) ,$$

mais compte tenu de ce qu'on a un isomorphisme canonique (SGA 4 XII 5.4) pour tout corps K/k algébriquement clos

$$H^i(X, \mathbb{Q}_\ell) \xrightarrow{\sim} H^i(X \otimes_k K, \mathbb{Q}_\ell) ,$$

nous espérons que le lecteur nous permettra de tels abus.) D'après (5.1.3), la flèche de Gysin s'exprime par

$$(5.7.8) \quad H^{n-2}(X_{\tilde{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell(-1)) \xrightarrow{m_* \oplus (-h^*)} H^n(X, \mathbb{Q}_\ell) \oplus H^{n-2}(\Delta, \mathbb{Q}_\ell(-1)) .$$

Par Lefschetz faible,

$$m_* H^{n-2}(X_{\tilde{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell(-1)) = m_* m^* H^{n-2}(X, \mathbb{Q}_\ell(-1)) = L_X H^{n-2}(X, \mathbb{Q}_\ell(-1))$$

est l'orthogonal de la partie primitive, de sorte qu'on a le diagramme commutatif

$$(5.7.9) \quad \begin{array}{ccc} F^2 H^n(\tilde{X}, \mathbb{Q}_\ell) & \hookrightarrow & F^1 H^n(\tilde{X}, \mathbb{Q}_\ell) \\ \uparrow \scriptstyle k_* & & \downarrow \scriptstyle \mathcal{P}f_* \oplus -g_* i^* \\ H^{n-2}(X_{\tilde{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell(-1)) & \xrightarrow{0 \oplus h^*} & \text{Prim}(X, \mathbb{Q}_\ell) \oplus H^{n-2}(\Delta, \mathbb{Q}_\ell(-1)) \end{array}$$

ce qui donne bien (5.7.1), cqfd.

Remarque 5.7.10. Dans 5.7, l'hypothèse (A) peut-être remplacée par celle, plus faible, que pour $q = n$, les flèches

$$(5.7.11) \quad H^q(\tilde{X}, \mathcal{Q}_\lambda) \longrightarrow H^0(\mathbb{P}^1, R^q \rho_* \mathcal{Q}_\lambda)$$

et

$$(5.7.12) \quad H^q(\tilde{X}, \mathcal{Q}_\lambda) \longrightarrow H^q(X_{\tilde{\eta}}, \mathcal{Q}_\lambda)$$

aient même noyau, comme le montre notre démonstration. En l'absence de cette condition, la conclusion peut tomber en défaut, cf. 5.9.

5.8. L'homomorphisme de Griffiths.

5.8.1. Soit $f: T \rightarrow S$ un morphisme de schémas. La suite spectrale de Leray définit une filtration (F^i) sur les $H^*(T, \mathcal{Q}_\lambda(j))$. On définit

$$(5.8.1.1) \quad \text{Prim}^*(T/S, \mathcal{Q}_\lambda(j)) = F^1 H^*(T, \mathcal{Q}_\lambda(j)).$$

Grâce au fait que la suite spectrale de Leray est contenu dans le "premier quadrant", on a

$$(5.8.1.2) \quad E_\infty^{0, \cdot} \hookrightarrow E_2^{0, \cdot}$$

de sorte que

$$(5.8.1.3) \quad \text{Prim}^*(T/S, \mathcal{Q}_\lambda(j)) = \text{Ker} (H^*(T, \mathcal{Q}_\lambda(j)) \rightarrow H^0(S, R^1 f_* \mathcal{Q}_\lambda(j))).$$

Pour la même raison, on a

$$(5.8.1.4) \quad E_\infty^{1, \cdot} \hookrightarrow E_2^{1, \cdot} .$$

Le composé

$$(5.8.1.5) \quad \text{Prim}^i(T/S, \mathcal{Q}_\lambda(j)) = F^1 H^i(T, \mathcal{Q}_\lambda(j)) \longrightarrow \text{gr}^1 H^i(T, \mathcal{Q}_\lambda(j)) = E_2^{1, i-1}$$

$$\downarrow$$

$$H^1(S, R_{f_*}^{i-1} \mathcal{Q}_\lambda(j)) = E_2^{1, i-1}$$

sera dénoté

$$(5.8.1.6) \quad U^i : \text{Prim}(T/S, \mathcal{Q}_\lambda(j)) \longrightarrow H^1(S, R_{f_*}^{-1} \mathcal{Q}_\lambda(j)) \quad .$$

5.8.2. Soit maintenant X projective, lisse, et irréductible, $D = \{H_\tau\}$ un pinceau d'hyperplans dont l'élément générique et l'axe coupent transversalement X . Désignons par $U \xrightarrow{\nu} \mathbb{P}^1$ un ouvert de lissité non vide de la projection $\rho : \tilde{X} \longrightarrow \mathbb{P}^1$ et soit $\tilde{X}|U = \tilde{X} \times_{\mathbb{P}^1} U$. On a le diagramme commutatif

$$(5.8.2.1) \quad \begin{array}{ccc} & \tilde{X} & \xleftarrow{\alpha} & \tilde{X}|U \\ & \swarrow f & & \downarrow \rho|U \\ X & & & U \\ & \downarrow \rho & \xleftarrow{\nu} & \downarrow \\ & \mathbb{P}^1 & & U \end{array} \quad .$$

Le morphisme $\rho|_U : \tilde{X}|_U \longrightarrow U$ étant propre et lisse, on a, par le théorème de la spécialisation de la cohomologie (SGA 4 XVI 2.2)

$$(5.8.2.2) \quad \text{Prim}^*(\tilde{X}|_U/U, \mathbb{Q}_\ell(j)) = \text{Ker}(H^*(\tilde{X}|_U, \mathbb{Q}_\ell(j)) \longrightarrow H^*(X_{\bar{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell(j))) ,$$

donc, d'après (5.2.3.1), on a

Proposition 5.8.2.3. Sous les hypothèses (5.8.2), pour $x \in H^n(X, \mathbb{Q}_\ell(j))$, on a l'équivalence

$$(5.8.2.4) \quad x \in \text{Prim}^n(X, \mathbb{Q}_\ell(j)) \iff \alpha^*f^*(x) \in \text{Prim}^n(\tilde{X}|_U/U, \mathbb{Q}_\ell(j)) .$$

Si de plus ρ vérifie l'hypothèse (A) de 5.3, on a

$$(5.8.2.5) \quad x \in \text{Prim}^n(X, \mathbb{Q}_\ell(j)) \iff f^*(x) \in \text{Prim}^n(\tilde{X}/\mathbb{P}^1, \mathbb{Q}_\ell(j)) .$$

Démonstration. (5.8.2.4) est prouvé. Quant à (5.8.2.5), l'hypothèse (A) implique que $H^0(\mathbb{P}^1, R^n \rho_* \mathbb{Q}_\ell(j)) \xrightarrow{\sim} H^0(U, \nu^* R^n \rho_* \mathbb{Q}_\ell(j))$, donc $[f^*(x)$ est primitif rel. à $\mathbb{P}^1 \alpha] \implies \alpha^*f^*(\alpha)$ l'est rel. à U .

Définition 5.8.3. Dans la situation 5.8.2, l'homomorphisme composé

$$(5.8.3.1) \quad \begin{array}{ccc} \text{Prim}^n(X, \mathbb{Q}_\ell(j)) & \xrightarrow{\alpha^*f^*} & \text{Prim}^n(\tilde{X}|_U/U, \mathbb{Q}_\ell(j)) \\ & \searrow \text{Grif} & \downarrow \text{"} \\ & & H^1(U, \nu^* R^{n-1} \rho_* \mathbb{Q}_\ell(j)) \end{array}$$

s'appelle l'homomorphisme de Griffiths (pour X , relatif au pinceau donné D).

Ajoutons au diagramme (5.8.2.1) la famille constante au-dessus de U, de fibre X

(5.8.3.2)

$$\begin{array}{ccccc}
 \tilde{X} & \xleftarrow{\alpha} & \tilde{X}|U & \xrightarrow{f \times \rho|U} & X \times U \\
 \swarrow f & & \downarrow \rho|U & & \searrow \text{pr}_2 \\
 X & & \mathbb{P}^1 & \xleftarrow{\nu} & U
 \end{array}$$

Théorème 5.8.4. Supposons que X vérifie (LV) (5.2.2), et que ρ vérifie l'hypothèse (A) (5.3). Alors pour tout $U \xrightarrow{\nu} \mathbb{P}^1$, ouvert de lissité $\neq \emptyset$ de ρ , l'homomorphisme de Griffiths "modulo partie fixe", qui est, par définition, le composé

(5.8.4.1) $\text{Prim}^n(X, \mathbb{Q}_\ell(j)) \xrightarrow{\text{Grif}} H^1(U, \nu^* R^{n-1} \rho_* \mathbb{Q}_\ell(j))$



$$H^1(U, E^{n-1} \rho_* (\mathbb{Q}_\ell(j))) \simeq \frac{H^1(U, \nu^* R^{n-1} \rho_* \mathbb{Q}_\ell(j))}{(f \times \rho|U)_* H^1(U, H^{n-1}(X, \mathbb{Q}_\ell(j)))_U}$$

est injectif.

Démonstration. Par (5.5.1), on a, au-dessus de \mathbb{P}^1 ,

$$(5.8.4.2) \quad R^{n-1} \rho_* \mathcal{Q}_\ell(j) \simeq H^{n-1}(X, \mathcal{Q}_\ell(j))_{\mathbb{P}^1} \oplus E^{n-1} \rho_* \mathcal{Q}_\ell(j) \quad ,$$

et au-dessus de U , on a

$$(5.8.4.3) \quad v^* R^{n-1} \rho_* \mathcal{Q}_\ell(j) \simeq H^{n-1}(X, \mathcal{Q}_\ell(j))_U \oplus v^* E^{n-1} \rho_* \mathcal{Q}_\ell(j) \quad ,$$

ce qui permet de récrire (5.8.4.1) comme indiqué :

$$(5.8.4.4) \quad \text{Prim}^n(X, \mathcal{Q}_\ell(j)) \xrightarrow{\text{Grif}} H^1(U, v^* R^{n-1} \rho_* \mathcal{Q}_\ell(j))$$

$$\downarrow$$

$$H^1(U, v^* E^{n-1} \rho_* \mathcal{Q}_\ell(j)) \quad .$$

D'après (5.7.1), la flèche (qui n'est défini que grâce à l'hypothèse (A))

$$(5.8.4.5) \quad u : \text{Prim}^n(X, \mathcal{Q}_\ell(j)) \longrightarrow H^1(\mathbb{P}^1, R^{n-1} \rho_* \mathcal{Q}_\ell)$$

est injective. La décomposition (5.8.4.2), compte tenu de ce que \mathbb{P}^1 est simplement connexe, donne

$$(5.8.4.6) \quad H^1(\mathbb{P}^1, R^{n-1} \rho_* \mathcal{Q}_\ell) \simeq H^1(\mathbb{P}^1, E^{n-1} \rho_* \mathcal{Q}_\ell(j)) \quad ,$$

de sorte qu'on peut compléter (5.8.4.4) en un diagramme commutatif

$$(5.8.4.7) \quad \begin{array}{ccc} \text{Prim}^n(X, \mathcal{Q}_\ell(j)) & \xrightarrow{\text{Grif}} & H^1(U, \nu_* R^{n-1} \rho_* \mathcal{Q}_\ell(j)) \\ \downarrow u & & \downarrow \\ H^1(\mathbb{P}^1, E^{n-1} \rho_* \mathcal{Q}_\ell(j)) & \xrightarrow{\nu^*} & H^1(U, \nu^* E^{n-1} \rho_* \mathcal{Q}_\ell(j)) . \end{array}$$

Il suffit maintenant de voir que la flèche en bas est injective, ce qui résulte du fait

$$(5.8.4.8) \quad E^{n-1} \rho_* \mathcal{Q}_\ell(j) \simeq \nu_* \nu^* E^{n-1} \rho_* \mathcal{Q}_\ell(j)$$

par le lemme (bien connu !) suivant :

Lemme 5.8.5. Soient $\nu : A \longrightarrow B$ un morphisme de topos, et soit F un faisceau sur A . Alors la flèche canonique

$$(5.8.5.1) \quad H^1(B, \nu_* F) \longrightarrow H^1(A, F)$$

est injective.

Démonstration. Dans une suite spectrale du premier quadrant, on a

$$(5.8.5.2) \quad E_2^{1,0} \simeq E_\infty^{1,0} .$$

Donc pour la suite spectrale de Leray

$$E_2^{p,q} = H^p(B, R^q \nu_* F) \implies H^{p+q}(A, F)$$

on a

$$(5.8.5.3) \quad E_2^{1,0} = H^1(B, \nu_* F) \simeq E_\infty^{1,0} = F^1 H^1(A, F) \quad .$$

Prenant $F = \nu^* E$, E un faisceau sur B , on trouve

$$(5.8.5.4) \quad H^1(B, \nu_* \nu^* E) \hookrightarrow H^1(A, \nu^* E) \quad .$$

5.8.6. Soit $L/k(\eta)$ une extension finie du corps des fonctions rationnelles sur \mathbb{P}^1 , et posons

$$(5.8.6.1) \quad S = \text{le normalisé de } \mathbb{P}^1 \text{ dans } L \quad .$$

Faisons le changement de base $S \rightarrow \mathbb{P}^1$ dans la situation (5.8.3.2)

$$(5.8.6.1 \text{ bis}) \quad \begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xleftarrow{\alpha_S} & \tilde{X}_S \\ \swarrow f & \downarrow \rho & \downarrow \rho_S \\ X & & \mathbb{P}^1 \\ & \searrow \pi & \leftarrow S \end{array} \quad .$$

Pour tout ouvert $V \xleftarrow{\mu} S$ au-dessus duquel ρ_S soit lisse, on obtient après le changement de base $V \xrightarrow{\pi \mu} \mathbb{P}^1$ dans (5.8.3.2),

$$(5.8.6.2) \quad \begin{array}{ccccc} & & \tilde{X} & \xleftarrow{\alpha_V} & \tilde{X}_V \\ & \swarrow f & \downarrow \rho & & \downarrow \rho_V \\ X & & \mathbb{P}^1 & \xleftarrow{\pi \mu} & V \\ & & & \swarrow \text{pr}_2 & \nearrow \text{f} \rho_V \end{array} \quad ,$$

et on a encore (cf. (5.8.2.3))

$$(5.8.6.3) \quad (\alpha_V f)^* \text{Prim}^n(X, \mathcal{Q}_\ell(j)) \subset \text{Prim}^n(\tilde{X}_V/V, \mathcal{Q}_\ell(j)),$$

de sorte qu'on peut parler encore de l'homomorphisme de Griffiths

$$(5.8.6.4) \quad \text{Prim}^n(X, \mathcal{Q}_\ell(j)) \xrightarrow{\text{Grif}} H^1(V, R^{n-1} \rho_{V*} \mathcal{Q}_\ell(j)).$$

Corollaire 5.8.7. Avec les notations précédentes, et sous les hypothèses de 5.8.4, l'homomorphisme de Griffiths "modulo partie fixe", i.e. le composé

$$(5.8.7.1) \quad \begin{array}{ccc} \text{Prim}^n(X, \mathcal{Q}_\ell(j)) & \xrightarrow{\text{Grif}} & H^1(V, R^{n-1} \rho_{V*} \mathcal{Q}_\ell(j)) \\ & & \downarrow \\ & & H^1(V, R^{n-1} \rho_{V*} \mathcal{Q}_\ell(j)) \\ H^1(V, (\pi \mu)^* E^{n-1}(\mathcal{Q}_\ell(j))) & \simeq & \frac{\quad}{(f \times \rho_V)^* H^1(V, H^{n-1}(X, \mathcal{Q}_\ell(j))_V)} \end{array}$$

est injectif.

Démonstration. Par le théorème de la spécialisation pour la cohomologie,

on a

$$R^{n-1} \rho_{V*} \mathcal{Q}_\ell(j) = (\pi \mu)^* R^{n-1} \rho_{*} \mathcal{Q}_\ell(j)$$

de sorte que par la décomposition (5.8.4.2), (5.8.7.1) se réécrit bien comme indiqué

$$\begin{array}{ccc} \text{Prim}^n(X, \mathcal{O}_\ell(j)) & \xrightarrow{\text{Grif}} & H^1(V, (\pi \mu)^* R^{n-1} \rho_* \mathcal{O}_\ell(j)) \\ & & \downarrow \\ & & H^1(V, (\pi \mu)^* E^{n-1} \rho_* \mathcal{O}_\ell(j)) \end{array} .$$

Il suffit donc de démontrer l'injectivité de

$$\text{Prim}^n(X, \mathcal{O}_\ell(j)) \longrightarrow H^1(V, \mu^* \pi^* E^{n-1} \rho_* \mathcal{O}_\ell(j))$$

pour $V \xrightarrow{\mu} S$ arbitrairement petit. On est ramené au cas

$$\left\{ \begin{array}{l} U \xrightarrow{\nu} \mathbb{P}^1 \text{ un ouvert de lissité de } \rho \\ V \xrightarrow{\pi_\nu} U \text{ le normalisé de } U \text{ dans } L \end{array} \right. .$$

Du diagramme commutatif cartésien

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\mu} & S \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ U & \xrightarrow{\nu} & \mathbb{P}^1 \end{array}$$

on conclut que

$$\mu^* \pi^* E^{n-1} \rho_* \mathcal{Q}_\ell(j) = \pi_U^* \nu^* E^{n-1} \rho_* \mathcal{Q}_\ell$$

de sorte que (5.8.7.3) se factorise

$$\begin{array}{ccc} \text{Prim}^n(X, \mathcal{Q}_\ell(j)) & \longrightarrow & H^1(U, \nu^* E^{n-1} \rho_* \mathcal{Q}_\ell(j)) \\ & & \downarrow \pi_U^* \\ & & H^1(V, \pi_U^* \nu^* E^{n-1} \rho_* \mathcal{Q}_\ell(j)) \end{array} .$$

Or, il suffit, grâce à (5.8.4), de vérifier que

$$\pi_U^* : H^1(U, \nu^* E^{n-1} \rho_* \mathcal{Q}_\ell(j)) \longrightarrow H^1(V, \pi_U^* \nu^* E^{n-1} \rho_* \mathcal{Q}_\ell(j))$$

est injectif. Comme $\pi_U : V \longrightarrow U$ est fini et plat, la théorie de la trace [SGA 4 XVII 6.2] nous fournit, pour tout \mathcal{Q}_ℓ -faisceau F sur U (p.ex. $F = \nu^* E^{n-1} \rho_* \mathcal{Q}_\ell(j)$) une application

$$\text{tr}_{\pi_U} : H^1(V, \pi_U^* F) \longrightarrow H^1(U, F(j))$$

qui vérifie

$$\text{tr}_{\pi_U} \circ \pi_U^* = \text{deg}(\pi_U).id \quad ,$$

ce qui implique l'injectivité de $H^*(U, F) \longrightarrow H^*(V, \pi_U^* F)$, et achève la démonstration.

5.9. Un exemple où l'hypothèse (A) n'est pas vérifiée.

Soit X une surface quadratique lisse dans \mathbb{P}^3 . Alors X vérifie (LV) (5.2.4). Prenons un pinceau (de Lefschetz, si l'on veut) d'hyperplans dont l'élément générique et l'axe coupent transversalement X . Alors (comme m'a fait observer Deligne) la projection $\rho : \tilde{X} \rightarrow \mathbb{P}^1$ ne vérifie pas (A). En effet, $R^2 \rho_* \mathbb{Q}_\ell$ n'est pas constant, car les fibres singulières sont des courbes coniques singulières, donc sont réductibles, et pour un pinceau de Lefschetz, sont chacun la réunion de deux droites qui se coupent en un point (c'est la définition d'un pinceau de Lefschetz dans ce cas simple). Donc

$$\dim_{\mathbb{Q}_\ell} \left(H^2 (\text{fibre sing.}, \mathbb{Q}_\ell) \right) = 2$$

bien que

$$\dim_{\mathbb{Q}_\ell} \left(H^2 (\text{fibre lisse}, \mathbb{Q}_\ell) \right) = 1 \quad .$$

De plus, la conclusion du théorème 5.8.4 est ici fausse. Désignons par $U \xrightarrow{\nu} \mathbb{P}^1$ un ouvert de lissité $\neq \emptyset$ de ρ . Comme les fibres de ρ au-dessus de U sont des courbes lisses de genre zéro, on a

$$\nu^* R^1 \rho_* \mathbb{Q}_\ell = 0$$

et donc

$$H^1(U, \nu^* R^1 \rho_* \mathbb{Q}_\ell) = 0 \quad ,$$

de sorte que l'homomorphisme de Griffiths

$$\text{Prim}^2(X, \mathbb{Q}_\ell) \xrightarrow{\text{Grif}} H^1(U, \nu^* R^1 \rho_* \mathbb{Q}_\ell)$$

est nul. Mais sur une surface quadratique, on a

$$\dim_{\mathbb{Q}_\ell} \left(\text{Prim}^2(X, \mathbb{Q}_\ell) \right) = 1 \quad .$$

On voit de même que la conclusion de 5.7 est ici en défaut.

6. Application de la théorie locale des cycles évanescents (Picard-Lefschetz).

Proposition 6.1. Désignons par Z une hypersurface dans l'espace projectif
 \mathbb{P}_k^r , $r \geq 2$, k étant un corps algébriquement clos. Soit

$$i_0 : D_0 \hookrightarrow \mathbb{P}^r$$

l'inclusion d'une droite qui ne coupe Z qu'en son ouvert de lissité,
et le coupe transversalement. Choisissons un point géométrique \bar{a} de
 $D_0 - D_0 \cap Z$, et désignons par

$$\pi_1^{\text{mod}}(D_0 - D_0 \cap Z, \bar{a})$$

le quotient de $\pi_1(D_0 - D_0 \cap Z, \bar{a})$ qui classifie les revêtements étales
de $D_0 - D_0 \cap Z$ qui sont modérément ramifiés en tout point de $D_0 \cap Z$.

Alors

6.1.1. L'homomorphisme canonique

$$(6.1.1.1) \quad i_{o_*} : \pi_1^{\text{mod}}(D_o - D_o \cap Z, \bar{a}) \longrightarrow \pi_1^{\text{mod}}(\mathbb{P}^r - Z, \bar{a})$$

est surjectif.

6.1.2. Chaque choix d'un point géométrique $\bar{x}_o \in D_o \cap Z$ et d'un "chemin" dans D_o entre \bar{x}_o et \bar{a} détermine un homomorphisme

$$(6.1.2.1) \quad \prod_{\ell \neq \text{car}(k)} \mathbb{Z}_\ell(1) \longrightarrow \pi_1^{\text{mod}}(D_o - D_o \cap Z, \bar{a})$$

dont l'image est "le" groupe d'inertie en \bar{x}_o . Prenant le composé de ce morphisme et de i_{o_*} , on trouve un homomorphisme

$$(6.1.2.2) \quad \prod_{\ell \neq \text{car}(k)} \mathbb{Z}_\ell(1) \longrightarrow \pi_1^{\text{mod}}(\mathbb{P}^r - Z) .$$

Si Z est irréductible, tous ces homomorphismes sont conjugués entre eux.

Démonstration. Désignons par T le sous-schéma de la grassmannienne formée des droites dans \mathbb{P}^r qui

(i) passent par \bar{a}

(ii) ne coupent Z qu'en son ouvert de lissité, et l'y coupent transversalement, par η son point générique, et par $i_\eta : D_\eta \longrightarrow \mathbb{P}^r \otimes_k k(\eta)$ la droite correspondante (qui est donc une droite "joignant \bar{a} au point générique de \mathbb{P}^r "). Choisissons aussi un point géométrique $\bar{\eta}$ au-dessus de η , et notons par $D_{\bar{\eta}}$ la droite "géométrique" correspondante. Soit o le point T correspondant à la droite donnée D_o .

D'après (SGA 1, XIII 2.8), il existe un homomorphisme de spécialisation (dépendant d'un chemin entre $\bar{\eta}$ et 0 dans T, donc défini à conjugaison près)

$$(6.1.3) \quad \pi_1^{\text{mod}}(D_{\bar{\eta}}^- - D_{\bar{\eta}}^- \cap Z, \bar{a}) \xrightarrow{\bar{\eta} \rightarrow 0} \pi_1^{\text{mod}}(D_0 - D_0 \cap Z, \bar{a})$$

tel que l'on ait :

6.1.4. Les homomorphisme (6.1.2.1) de monodromie locale

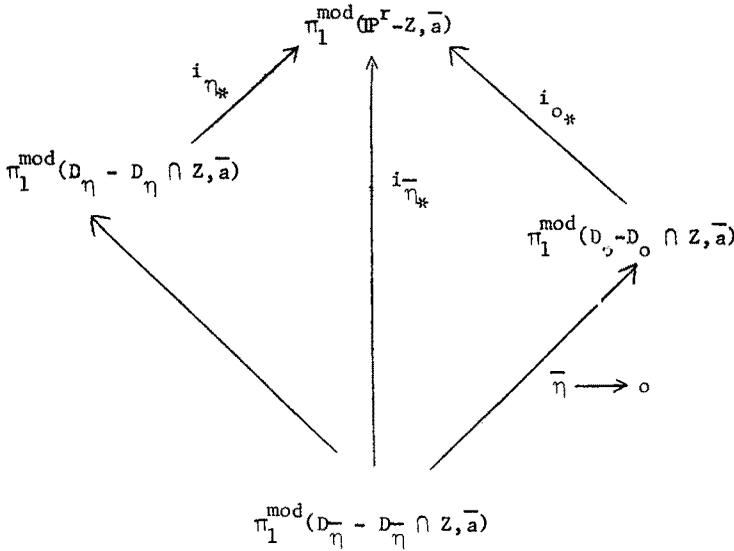
$$\prod_{\ell \neq \text{car}(k)} \mathbb{Z}_{\ell}(1) \longrightarrow \pi_1(D_0 - D_0 \cap Z, \bar{a})$$

s'obtiennent en prenant le composé de la flèche de spécialisation (6.1.3)

avec les homomorphismes de monodromie locale pour $D_{\bar{\eta}}^-$,

$$(6.1.4.1) \quad \prod_{\ell \neq \text{car}(k)} \mathbb{Z}_{\ell}(1) \longrightarrow \pi_1^{\text{mod}}(D_{\bar{\eta}}^- - D_{\bar{\eta}}^- \cap Z, \bar{a}) \xrightarrow{\bar{\eta} \rightarrow 0} \pi_1^{\text{mod}}(D_0 - D_0 \cap Z, \bar{a}) ;$$

(6.1.5) le diagramme suivant est commutatif



Admettons ceci, et prouvons d'abord 6.1.1. Or, par la commutativité de 6.1.5, il suffit de démontrer que l'homomorphisme

$$i_{\eta_*}^- : \pi_1^{\text{mod}}(D_{\eta}^- - D_{\eta}^- \cap Z, \bar{a}) \longrightarrow \pi_1^{\text{mod}}(\mathbb{P}^r - Z, \bar{a})$$

est surjectif, et pour ceci il suffit de démontrer que l'homomorphisme analogue des π_1 immodérés

$$(6.1.6) \quad i_{\eta}^- : \pi_1(D_{\eta}^- - D_{\eta}^- \cap Z, \bar{a}) \longrightarrow \pi_1(\mathbb{P}^r - Z, \bar{a})$$

est surjectif, i.e. que pour tout revêtement étale $E \longrightarrow \mathbb{P}^r - Z$, avec E connexe (et donc irréductible, $\mathbb{P}^r - Z$ étant lisse, donc unibranche

(EGA IV 18.10.3)), son image réciproque $E_{\eta}^- = E \times_{\mathbb{P}^r - Z} (D_{\eta}^- - D_{\eta}^- \cap Z)$ au-dessus de $D_{\eta}^- - D_{\eta}^- \cap Z$ reste géométriquement irréductible. Pour ceci, il suffit d'utiliser la variante suivante du théorème de Bertini (EGA V ...)

(pour la flèche composé $E \longrightarrow \mathbb{P}^r - Z \hookrightarrow \mathbb{P}^r$, et $s = 1$):

6.1.6.1. Théorème de Bertini : Soit k un corps, $\mathbb{P}^r = \mathbb{P}_k^r$, et $f : X \longrightarrow \mathbb{P}^r$ un morphisme non constant, où X est un schéma algébrique géométriquement irréductible. Pour chaque entier $s < \dim \overline{f(X)}$, désignons par L_t le sous-espace linéaire générique de codimension s de \mathbb{P}^r . Alors $X_t = f^{-1}(L_t)$ est géométriquement irréductible.

Etablissons maintenant 6.1.2. D'après 6.1.4, et la commutativité de (6.1.5), il suffit de démontrer que tous les homomorphismes de monodromie locale (6.1.3) pour D_{η}^-

$$(6.1.7.1) \quad \prod_{\ell \neq \text{car}(k)} \mathbb{Z}_{\ell}(1) \longrightarrow \pi_1^{\text{mod}}(D_{\bar{\eta}} - D_{\bar{\eta}} \cap Z, \bar{a})$$

deviennent conjugués après la composition avec l'homomorphisme

$$(6.1.7.2) \quad \pi_1^{\text{mod}}(D_{\bar{\eta}} - D_{\bar{\eta}} \cap Z, \bar{a}) \longrightarrow \pi_1^{\text{mod}}(D_{\eta} - D_{\eta} \cap Z, \bar{a}) .$$

Pour prouver ceci, remarquons que pour tout K fini et galoisien sur $k(\eta)$, $k(\eta) \subset K \subset K(\bar{\eta})$, le schéma

$$D_K \stackrel{\text{def}}{=} D_{\eta} \times_{k(\eta)} K$$

est un revêtement étale de D_{η} , de sorte que $D_K - D_K \cap Z$ est un revêtement modéré de $D_{\eta} - D_{\eta} \cap Z$, d'où on déduit une action de $\pi_1^{\text{mod}}(D_{\bar{\eta}} - D_{\bar{\eta}} \cap Z, \bar{a})$ sur le schéma $D_K \cap Z$. Nous prenons K suffisamment grand pour que tous les points de $D_K \cap Z$ soient K -rationnels, ceci étant possible car par hypothèse le schéma $D_{\eta} \cap Z$ est étale sur $k(\eta)$.

Il reste à démontrer que le groupe $\pi_1^{\text{mod}}(D_{\bar{\eta}} - D_{\bar{\eta}} \cap Z, \bar{a})$ agit de façon transitive sur les points de $D_K \cap Z$, pour établir la conjugaison des homomorphismes composés d'inertie locale

$$\prod_{\ell \neq \text{car}(k)} \mathbb{Z}_{\ell}(1) \longrightarrow \pi_1^{\text{mod}}(D_{\eta} - D_{\eta} \cap Z, \bar{a})$$

pour les divers points de $D_K \cap Z$. Or, l'action sur $D_K \cap Z$ de $\pi_1^{\text{mod}}(D_{\bar{\eta}} - D_{\bar{\eta}} \cap Z, \bar{a})$ se factorise par le quotient canonique

$$\pi_1^{\text{mod}}(D_{\bar{\eta}} - D_{\bar{\eta}} \cap Z, \bar{a}) \longrightarrow \pi_1(\eta, \bar{\eta}) = \text{Gal}(K/k(\eta)) ,$$

et l'action de $\text{Gal}(k(\eta)/k)$ sur $K_K \cap Z$ est celle qui est compatible avec l'inclusion

$$D_K \cap Z \hookrightarrow \mathbb{P}_k^r \times_k K ,$$

où $\text{Gal}(k(\eta)/k)$ n'agit sur $\mathbb{P}_k^r \times_k K$ que via le deuxième facteur. Ceci posé, on voit que l'énoncé voulu équivaut à ce que le schéma $D_\eta \cap Z$ n'a qu'un point (i.e. que c'est le spectre d'un corps). Or, en termes terre à terre, ceci n'est autre que le fait suivant (du style Bertini) (où l'on prend pour Z une équation affine $F = 0$, et on suppose que le point \bar{a} est l'origine) :

Fait 6.1.8. Soit k un corps algébriquement clos, $r \geq 2$, et

$F(X_1, \dots, X_r) \in k[X_1, \dots, X_r]$ un polynôme irréductible. Alors le polynôme

$$G(T) = F(X_1 T, \dots, X_r T) \in k(X_1, \dots, X_r)[T]$$

est irréductible (en tant que polynôme en T à coefficients dans $k(X_1, \dots, X_r)$).

Ceci termine la démonstration de 6.1.2, cqfd.

Remarque 6.1.9. Une autre méthode de démonstration de 6.1.2, valable sous des conditions nettement plus générales, consisterait à s'assurer simplement d'une compatibilité générale pour les "homomorphismes de monodromie", disant que les homomorphismes composés de 6.1.2 sont conjugués de l'homomorphisme de monodromie relatif au point générique de Z (donc sont conjugués entre eux !).

Corollaire 6.1.10. Soit X une variété projective, lisse et connexe de dimension n sur un corps k algébriquement clos k. Supposons que $n = \dim X$ soit pair, ou que $\text{card}(k) \neq 2$. Soit D un pinceau de Lefschetz pour X, η son point générique, $\bar{\eta}$ un point géométrique au-dessus de η . Alors la représentation naturelle de $\pi_1(D - D \cap \check{X}, \bar{\eta})$ sur $H^{n-1}(X_{\bar{\eta}}, \mathbb{Q}_{\ell})$ se factorise par $\pi_1^{\text{mod}}(D - D \cap \check{X}, \bar{\eta})$. Si cette représentation est non triviale, alors $D \cap \check{X} \neq \emptyset$ et le groupe d'inertie en tout point de $D \cap \check{X}$ agit non trivialement.

Démonstration. Si $\dim(\check{X}) \leq r-2$, alors $D \cap \check{X}$ est vide, et il n'y a rien à prouver, compte tenu que \mathbb{P}^1 est simplement connexe. Sinon, \check{X} est une hypersurface dans \mathbb{P}^r (XVII, 3.1.4), et, par 3.2.10 et XVII 3.5, 6.1.1 s'applique (prenant \check{X} pour Z, D pour D_0). Le fait que l'action de π_1 sur $H^{n-1}(X_{\bar{\eta}}, \mathbb{Q}_{\ell})$ soit modérée a été vue dans la théorie locale, avec la formule de Picard-Lefschetz (XV 3.4), rappelée plus bas. Compte tenu du fait (non trivial!) que $\pi_1^{\text{mod}}(D - D \cap \check{X}, \bar{\eta})$ est engendré par les groupes d'inertie en les différents points de $D \cap \check{X}$ (SGA 1 XIII 2.10), on a la conclusion voulue. Nous allons utiliser le résultat précédent pour étudier maintenant la condition (A) de (5.3.5). Rappelons d'abord le résultat suivant (XV 3.4), conséquence facile de la formule de Picard-Lefschetz :

Proposition 6.2. Soit X une variété projective lisse et connexe de dimension n sur le corps algébriquement clos k . Désignons par D un pinceau de Lefschetz, η son point générique, $\bar{\eta}$ un point géométrique au-dessus de η . Alors le pinceau D satisfait à la condition (A) si et seulement si le groupe d'inertie en tout point de $D \cap \check{X}$ agit non trivialement sur $H^{n-1}(X_{\bar{\eta}}, \mathbb{Q}_{\ell})$.

Théorème 6.3. Sous les hypothèses de 6.2, on a :

(6.3.1) Si $n = \dim X$ est impair, la condition (A) est vérifiée pour tout pinceau de Lefschetz pour X .

(6.3.2) Supposons que $n = \dim X$ soit pair, ou que $\text{car}(k) \neq 2$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) D ne satisfait pas à la condition (A) (5.3.5)

(ii) $\pi_1(D - D \cap \check{X})$ agit trivialement sur $H^{n-1}(X_{\bar{\eta}}, \mathbb{Q}_{\ell})$, et $D \cap \check{X} \neq \emptyset$.

(iii) Il existe un point de $D \cap \check{X}$ dont le groupe d'inertie agit trivialement sur $H^{n-1}(X_{\bar{\eta}}, \mathbb{Q}_{\ell})$.

(iv) Le faisceau $R^{n-1} \rho_* \mathbb{Q}_{\ell}$ est un faisceau constant sur D et $D \cap \check{X}$ est non vide.

(v) Le faisceau $R^{n-1} \rho_* \mathbb{Q}_{\ell} |_{\check{U}}$ est un faisceau constant sur U

(où U est un ouvert non vide D au-dessus duquel ρ soit lisse), et ρ n'est pas lisse.

(6.3.3) Si de plus X satisfait à la condition (LV) (5.2.2), ces conditions (i) -(v) sont aussi équivalentes à la condition :

(vi) la flèche de restriction

$$H^{n-1}(X, Q_\lambda) \longrightarrow H^{n-1}(X_{\eta'}, Q_\lambda)$$

est surjective (donc un isomorphisme par "le théorème de Lefschetz faible").

Démonstration. L'assertion 6.3.1 résulte de XV 3.4.

Passons aux équivalences de 6.3.2 ; (i) \iff (iii) par 6.2, (ii) \iff (iii) par 6.1.6, (ii) \iff (v) par tautologie, et (iv) \iff (v) par 5.3.4. Enfin, si X satisfait à la condition (LV), 5.6.10 donne l'équivalence (ii) \iff (vi), cqfd.

Remarque 6.3.4. On voit que la condition (A) ne dépend pas du choix du pinceau de Lefschetz D, mais seulement de l'immersion (de Lefschetz) $i : X \longrightarrow \mathbb{P}^r$ envisagée. C'est en effet clair par (6.3.1) si dim X est impair, et si dim X est pair, la condition (A) signifie aussi que le système local sur $\mathbb{P}^r - X$ formé des $H^{n-1}(X \cap H_s, Q_\lambda)$ est constant, comme il résulte du critère (ii), et du fait que le système local envisagé est modérément ramifié en le point générique de $\overset{v}{X}$ et de la surjectivité (6.1.2).

Corollaire 6.4. Sous les hypothèses de 6.2, supposons que $n = \dim X$ est paire, ou que $\text{car}(k) \neq 2$ et que X satisfait à la condition (LV). Alors il existe un entier d_0 tel que pour $d \geq d_0$, tout pinceau de

Lefschetz de sections de X par des hypersurfaces de degré d satisfait à la condition (A).

Démonstration. D'après l'équivalence (i) \iff (vi) de (6.3.2), il suffit de voir que, désignant par $Y(d)$ une section hypersurface lisse de X de degré d, on a

$$(6.4.1) \quad \dim H^{n-1}(Y(d), \mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow \infty \text{ pour } d \longrightarrow \infty .$$

En effet, on a le résultat précis suivant :

Lemme 6.4.2. Soit X une variété projective, lisse, et connexe de dimension $n \geq 1$ sur un corps algébriquement clos k, et désignons par $Y(d)$ une section hypersurface de degré d. Alors il existe un polynôme $f(T) \in \mathbb{Z}[T]$ tel que

$$(6.4.2.1) \quad f(T) = \deg(X) T^n + \text{un polynôme de degré } \leq n-1$$

$$(6.4.2.2) \quad \text{pour } d \geq 1, f(d) = \dim H^{n-1}(Y(d), \mathbb{Q}_\ell) .$$

Démonstration. D'après (XVII 5.7.5), désignant par $C(X)$ la classe de Chern totale de X, et par H la première classe de Chern d'un hyperplan, on a la formule suivante pour la caractéristique d'Euler-Poincaré de $Y(d)$

$$(6.4.2.3) \quad \chi(Y(d)) = \int_X \frac{d \cdot H \cdot C(X)}{1 + dH} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} d^i \int_X H^i \cdot C_{n-i} .$$

On a, d'autre part, par dualité de Poincaré et Lefschetz faible

$$(6.4.2.4) \quad \chi(Y(d)) = (-1)^{n-1} \dim H^{n-1}(Y(d), \mathbb{Q}_\ell) + 2 \sum_{i \geq 1} (-1)^{n-1-i} \dim H^{n-1-i}(X, \mathbb{Q}_\ell).$$

Mettant ensemble (6.4.2.3) et (6.4.2.4) donne le résultat voulu.

6.5. Un rappel sur la formule de Picard-Lefschetz (XV 3.4).

Soient S le spectre d'un anneau de valuation hensélien strict η son point générique, $\bar{\eta}$ un point géométrique au-dessus de η , et s son point fermé. Soit

$$\rho : X \longrightarrow S$$

un morphisme propre, avec X un schéma régulier connexe de dimension n , tel que ρ est lisse en dehors d'un point x , point qui se trouve dans la fibre spéciale, et qui est une singularité quadratique ordinaire de la fibre spéciale.

Désignons par I le groupe d'inertie de S en s . On sait

(XV 3.4) que I agit trivialement sur $H^i(X_{\bar{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell)$ pour $i \neq n-1$, et que son action sur $H^{n-1}(X_{\bar{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell)$ est donnée par les formules suivantes :

6.5.1. Si $n = 2m+1$, alors I agit à travers un quotient isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (NB. si $\text{car.} k \neq 2$, il y a un seul tel quotient). Il existe un élément $\delta \in H^{n-1}(X_{\bar{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell(m))$, uniquement déterminé au signe près, qui s'appelle le cycle évanescent en le point s , tel qu'on ait

(6.5.1.1) $\delta \cdot \delta = (-1)^{m_2}$ dans $H^{2n-2}(X_{\bar{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell(n-1)) \simeq \mathbb{Q}_\ell$,

(6.5.2.2) l'élément non trivial σ de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ agit sur $H^1(X_{\bar{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell)$ par la symétrie

$$\sigma x = x - (-1)^m(x \cdot \delta) \delta .$$

[L'élément $x \cdot \delta$ est dans $H^{2n-2}(X_{\bar{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell(m)) \simeq \mathbb{Q}_\ell(-m)$, donc le produit $(x \cdot \delta) \delta$ définit un élément de $H^{n-1}(X_{\bar{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell)$]

6.5.2. Si $n = 2m + 2$, alors I agit à travers son quotient canonique $\mathbb{Z}_\ell(1)$. Il existe un élément $\delta \in H^{n-1}(X_{\bar{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell(m))$, élément canoniquement déterminé au signe près et qui s'appelle le cycle évanescent en le point s, tel que $\sigma \in \mathbb{Z}_\ell(1)$ agit sur $\chi \in H^{n-1}(X_{\bar{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell)$ par la transvection

(6.5.2.1)
$$\sigma(x) = x - (-1)^m \sigma.(x \cdot \delta) \delta .$$

[Le produit $x \cdot \delta$ est dans $H^{2n-2}(X_{\bar{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell(m)) \simeq \mathbb{Q}_\ell(-m-1)$, donc son produit par $\sigma \in \mathbb{Z}_\ell(1)$ définit un élément $\sigma.(x \cdot \delta) \in \mathbb{Q}_\ell(-m)$, et cet élément, multiplié par $\delta \in H^{n-1}(X_{\bar{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell(m))$ donne l'élément $\sigma.(x \cdot \delta) \delta \in H^{n-1}(X_{\bar{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell)$.]

Reprenons le cas global :

Théorème 6.6. Soit X une variété projective lisse et connexe de dimension n sur un corps algébriquement clos k. On suppose n pair ou car k ≠ 2. Soient D un pinceau de Lefschetz pour X, η son point générique, $\bar{\eta}$ un

point géométrique au-dessus de η , et s_1, \dots, s_N les points de $D \cap \check{X}$.

Choisissons par chaque i un isomorphisme ι_i entre $\bar{\eta}$ et le point générique géométrique de $S_i =$ le hensélisé strict de D en s_i , de sorte que le groupe I_i d'inertie de δ_i en S_i agit sur $H^{n-1}(X_{\bar{\eta}}, \mathcal{O}_{\check{X}}(j))$ et définit le cycle évanescant (6.5) en s_i

$$\delta_i \in H^{n-1}(X, \mathcal{O}_{\check{X}}(m)), m = \begin{cases} \frac{n-1}{2} & \text{si } n \text{ impair} \\ \frac{n}{2} - 1 & \text{si } n \text{ pair} . \end{cases}$$

On suppose les ι_i choisis de telle façon que les $I_i \subset \pi = \pi_1^{\text{mod}}(D - D \cap \check{X}, \bar{\eta})$ engendrent topologiquement le groupe π_1 (ce qui est possible, en vertu de SGA 1 XIII 2.10). Ceci posé, on a :

6.6.1. Si X satisfait à la condition (LV), l'espace de cohomologie évanescante $E^{n-1}(X_{\bar{\eta}}, \mathcal{O}_{\check{X}}(m))$ ($\stackrel{\text{dfn}}{=} \text{l'orthogonal de } H^{n-1}(X, \mathcal{O}_{\check{X}}(m)) \text{ dans } H^{n-1}(X_{\bar{\eta}}, \mathcal{O}_{\check{X}}(m))$, cf. 5.4.4) est engendré par les cycles évanescents $\delta_i, i=1, \dots, N$.

6.6.2. Les cycles évanescents δ_i sont conjugués, au signe près, sous le groupe de monodromie globale $\pi_1(D - D \cap \check{X})$.

Démonstration. Pour prouver 6.6.1, notons que, par la formule de Picard-Lefschetz 6.5, on a, posant $\pi = \pi_1(D - D \cap \check{X})$, et grâce au fait que les I_i engendrent π :

(6.6.3) $H^{n-1}(X_{\bar{\eta}}, Q_{\ell}(m))^{\pi} =$ l'orthogonal dans $H^{n-1}(X_{\bar{\eta}}, Q_{\ell}(m))$
 du sous-espace engendré par les δ_i .

Par 5.6.10, on a

(6.6.4) $H^{n-1}(X_{\bar{\eta}}, Q_{\ell}(m))^{\pi} = \text{Im}(H^{n-1}(X, Q_{\ell}(i)))$,

de sorte que prenant les orthogonaux des deux membres de (6.6.3), on trouve 6.6.1.

Pour prouver 6.6.2, on remarque simplement que le cycle évanescents δ_i est déterminé au signe près, par la représentation du groupe d'inertie en s_i . Donc on n'a qu'à appliquer 6.1.2, qui donne la conjugaison dans $\pi_1^{\text{mod}}(\mathbb{P}^r - X, \bar{\eta})$ des homomorphismes d'inertie composés

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_{\ell}(1) & \longrightarrow & \pi_1^{\text{mod}}(D - D \cap \check{X}, \bar{\eta}) \\ & & \downarrow \\ & & \pi_1^{\text{mod}}(\check{\mathbb{P}}^r - \check{X}, \bar{\eta}) \end{array} .$$

Ceci donne la conjugaison (à signe près) des cycles évanescents qu'ils déterminent, par des éléments de $\pi_1^{\text{mod}}(\check{\mathbb{P}}^r - \check{X}, \bar{\eta})$, et la démonstration s'achève par 6.1.1, qui donne la surjectivité de

$$\pi_1^{\text{mod}}(D - D \cap \check{X}) \longrightarrow \pi_1^{\text{mod}}(\check{\mathbb{P}}^r - \check{X}) .$$

Corollaire 6.7. Sous les hypothèses de 6.6, supposons que X satisfait à la condition (LV). Alors :

6.7.1. La représentation de $\pi_1(D - D \cap \overset{\vee}{X})$ sur $E^{n-1}(X_{\overline{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell)$ est absolument irréductible.

6.7.2. Si n est pair, tout sous-groupe d'indice fini dans $\pi_1(D - D \cap \overset{\vee}{X})$ agit de façon absolument irréductible sur $E^{n-1}(X_{\overline{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell)$.

Démonstration. On peut évidemment remplacer le module envisagé par le tordu $E = E^{n-1}(X_{\overline{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell(m))$. Soit $\overline{E} = E \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} \overline{\mathbb{Q}_\ell}$ et soit χ un élément $\neq 0$ de \overline{E} . Pour démontrer 6.7.1, il faut prouver que le sous $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ -vectoriel de \overline{E} engendré par χ et ses conjugués sous π est \overline{E} tout entier. D'après 6.6.1 et 6.6.2, il suffit de prouver que ce sous-module contient un des cycles évanescents δ_i . Mais comme χ satisfait (LV), la restriction de la forme de cup-produit à $H^{n-1}(X, \mathbb{Q}_\ell(m)) \subset H^{n-1}(X_{\overline{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell(m))$ est non dégénérée, donc aussi la restriction à l'orthogonal $E^{n-1}(X_{\overline{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell(m))$, donc en vertu de (6.6.1) il existe au moins une valeur de i telle que l'on ait :

$$x \cdot \delta_i \neq 0 \quad .$$

Pour cet i , il existe par 6.5 un élément σ_i du groupe d'inertie en s_i tel que

$$(6.7.3) \quad \sigma_i(x) - x = \text{un multiple non nul de } \delta_i \quad ,$$

ce qui achève la démonstration de 6.7.1.

Quant à 6.7.2, on a $n-1$ impair, donc $\delta \cdot \delta = 0$, et pour toute puissance k -ième de σ_i on a, en itérant 6.5.2,

$$(6.7.4) \quad \sigma_i^k(x) = X + k \sigma_i(x \cdot \delta_i) \delta_i \quad .$$

Donc un sous \mathbb{Q}_ℓ -module M de E est stable sous l'action de π si et seulement si l'est sous un sous-groupe d'indice fini, car les deux conditions équivalent à la condition

$$x \in M \implies \exists V_i \text{ tel que le cup-produit } x \cdot \delta_i \neq 0, \text{ alors } \delta_i \in M.$$

Donc on est ramené à l'énoncé 6.7.1 déjà prouvé.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] P. DELIGNE. Théorème de Lefschetz et critères de dégénérescence de suites spectrales, Pub. Math. IHES 35, 1968, 259-278.
- [2] S. KLEIMAN. Algebraic cycles and the Weil conjectures, in Dix Exposés sur la cohomologie des schémas, North Holland, 1968.
- [3] S. LEFSCHETZ. L'analyse situs et la Géométrie Algébrique, Gauthiers-Villars, Paris 1924.
- [4] D. LIEBERMAN. Higher Picard Varieties, Amer. J. Math, 15 (4) 1968 p.1165-1199.
- [5] D. MUMFORD. non publié.
- [6] A. WEIL. Variétés Kähleriennes, Hermann, Paris 1958.