S G A 7

E X P O S E XXII

UNE FORMULE DE CONGRUENCE POUR LA FONCTION ζ

par N. KATZ

0. Introduction

Soit X un schéma propre sur $\mathbb{F}_q$. Sa fonction zêta, considérée comme élément de $\mathbb{Z}[[T]]$, peut-être réduite modulo p ; on veut la calculer modulo p. On trouve une expression du type auquel on pouvait s'attendre depuis les formules de points fixes du type "Woods Hole", comme produit alterné de polynômes caractéristiques d'un "Frobenius" convenable agissant sur l'un quelconque des trois espaces de cohomologie suivants :

1) la cohomologie cohérente $H^i(X,\mathcal{O}_X)$ (3.1.1)

2) la cohomologie de De Rham $H^i_{DR}(X) = \mathbb{H}^i(X,\Omega^\cdot_X)$ (3.1.1)

3) la cohomologie étale $H^i_{et}(X,\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ (3.1.2).

Cette expression doit être vue comme une amélioration d'un cas spécial de la formule des traces de Woods Hole : celui du faisceau structural et de l'endomorphisme de Frobenius. Ce cas est, en effet, un corollaire de la formule de congruence (cf. 3.2.1).

La méthode de cet exposé est complètement naïve ; elle consiste à se ramener au cas d'une hypersurface, ensuite à "réduire modulo p" le calcul de DWORK pour la vraie fonction zêta d'une hypersurface. En "réduisant" soigneusement, on trouve l'amélioration 5.0.6 due à AX [1] (et également à DWORK dans le cas lisse [4, § 7])du théorème bien connu de WARNING-CHEVALLEY [8].

Une autre méthode, entièrement cohomologique et dans l'esprit de SGA 5, s'appliquant également à des "coefficient tordus", vient d'être trouvée par DELIGNE, et devrait figurer dans la réédition de SGA 5 ; elle repose sur la formule des traces type "Woods Hole", et la"formule de Künneth symétrique" de DELIGNE (SGA 4 XVII 5.5.21).

1. Un rappel sur les opérations "p-linéaires"

1.0. Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur un corps k de caractéristique $p > 0$. Désignons par q une puissance de p. Una application

(1.0.1) $$\varphi : V \longrightarrow V$$

s'appelle q-linéaire si elle additive et si elle vérifie

(1.0.2) $$\varphi(\lambda v) = \lambda^q \varphi(v) \qquad \forall\ \lambda \in k,\ v \in V\ .$$

1.0.3. On fera attention au fait que l'itéré n'ième φ^n d'un endomorphisme q-linéaire est q^n-linéaire, et que, si k n'est pas parfait, l'image $\varphi(V)$ d'un endomorphisme q-linéaire n'est pas nécessairement un k-sous-espace vectoriel.

1.0.4. Pour chaque extension K/k, un endomorphisme q-linéaire φ de V donne lieu à un unique endomorphisme q-linéaire φ_K de $V_K = V \otimes_k K$, satisfaisant à la formule

(1.0.5) $$\varphi_K(\mu \otimes v) = \mu^q \varphi(v) \qquad \text{pour } \mu \in K,\ v \in V.$$

1.0.6. On dit qu'un endomorphisme q-linéaire φ de V est semi-simple si son image engendre V comme k-vectoriel, et qu'il est nilpotent s'il admet un itéré nul.

On définit des k-sous-espace stables par φ

(1.0.7) $$V_{ss} = \bigcap_{n \geq 1} (\text{le k-sous-espace engendré par } \varphi^n(V))$$

(1.0.8) $$V_{nilp} = \bigcup_{n \geq 1} (\text{le noyau de } \varphi^n : V \longrightarrow V) \quad .$$

Evidemment, φ restreint à V_{ss} est semi-simple, et φ restreint à V_{nilp} est nilpotent. Si k est parfait, on a

(1.0.9) $$V = V_{ss} \oplus V_{nilp} \quad ,$$

mais, si k n'est pas parfait, (1.0.9) devient inexact, car il y a des endomorphismes q-linéaires qui sont injectifs sans être semi-simples.

Pour une extension K/k quelconque, on a

(1.0.10) $$(V_K)_{ss} = V_{ss} \otimes_k K \quad .$$

Proposition 1.1. *Soit φ un endomorphisme q-linéaire d'un espace vectoriel V de dimension finie sur un corps séparablement clos k. Si φ est semi-simple alors, posant*

$$V^{1-\varphi} = \text{les } \mathbb{F}_q\text{-vectoriel formé des points fixes de } \varphi$$
$$= \mathrm{Ker}(1-\varphi),$$

on a

(1.1.1) $$V \xleftarrow{\sim} (V^{1-\varphi}) \otimes_{\mathbb{F}_q} k \quad .$$

<u>Corollaire</u> 1.1.2. $V^{1-\varphi^n} \xleftarrow{\sim} (V^{1-\varphi}) \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^n}$.

<u>Démonstration</u>. (LANG, cf. [6], p. 119).

Soit $\underline{e}$ une k-base de V, et écrivons

(1.1.3) $$\varphi(\underline{e}) = A\underline{e} \quad , \quad A \in GL(n,k)$$

Désignons par

(1.1.4) $$F : GL(n,k) \longrightarrow GL(n,k)$$

la flèche "élévation des coordonnées à la q'ième puissance". Alors pour $g \in GL(n,k)$, $g\underline{e}$ est une base de V formée de points fixes de φ si et seulement si

(1.1.5) $$F(g)\ A\ g^{-1} = 1 \quad .$$

Désignons par $\overline{k}$ une clôture algébrique de k. Le <u>groupe</u> $GL(n,\overline{k})$ <u>agit</u> sur la variété $GL(n,\overline{k})$ par

(1.1.6) $$\begin{cases} GL(n,\overline{k}) \times GL(n,\overline{k}) \longrightarrow GL(n,\overline{k}) \\ (g,A) \longmapsto F(g)Ag^{-1} \end{cases} .$$

Pour A fixé, la flèche

(1.1.7) $$g \longmapsto F(g)\ A\ g^{-1}$$

est étale comme on voit en calculant son application tangente, donc les orbites sont ouvertes. Comme $GL(n,\overline{k})$ est irréductible, il n'y a qu'une orbite ; autrement dit, la flèche

(1.1.8) $$\begin{array}{c} Gl(n,\overline{k}) \longrightarrow Gl(n,\overline{k}) \\ g \longrightarrow F(g^{-1}).g \end{array}$$

est surjective. Parce qu'elle est aussi étale, il s'ensuit, k étant séparablement clos que la flèche

$$(1.1.9) \qquad \begin{array}{ccc} GL(n,k) & \longrightarrow & GL(n,k) \\ g & \longrightarrow & F(g^{-1}).g \end{array}$$

est surjective, ce qui veut dire que V admet une k-base formée des points fixes de φ. Il est alors clair, φ étant q-linéaire, que tout point fixe de φ se trouve dans le $\mathbb{F}_q$-vectoriel engendré par une k-base formée des points fixes de φ, ce qui prouve 1.1.

Corollaire 1.1.10. *Soit φ un endomorphisme q-linéaire d'un espace vectoriel V de dimension finie sur un corps séparablement clos k. Alors on a un isomorphisme canonique*

$$(1.1.11) \qquad V_{ss} \xleftarrow{\;\sim\;} V^{1-\varphi} \otimes_{\mathbb{F}_q} k \quad .$$

Il suffit en effet d'appliquer 1.1 à V_{ss}.

Proposition 1.2. *Soit φ un endomorphisme q-linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie sur un corps séparablement clos k. Alors l'application additive*

$$1 - \varphi : V \longrightarrow V$$

est surjective.

Démonstration. On a une suite exacte de groupes abéliens

$$0 \longrightarrow V_{ss} \longrightarrow V \longrightarrow V/V_{ss} \longrightarrow 0,$$

sur laquelle agit $1 - \varphi$. Par le "lemme du serpent", il suffit de traiter V_{ss}, évident par 1.1 en employant une base formée des points fixes, et V/V_{ss}, sur lequel φ est nilpotente, donc sur lequel $1 - \varphi$ est inversible.

2. *Cohomologie cohérente et cohomologie étale*

Proposition 2.0. *Soit* $\overline{X}$ *un schéma propre sur un corps* k *séparablement clos, et désignons par*

(2.0.1) $$\overline{\mathcal{F}}_p : H^\cdot(\overline{X},\mathcal{O}_{\overline{X}}) \longrightarrow H^\cdot(\overline{X},\mathcal{O}_{\overline{X}})$$

l'application p-*linéaire induite par*

(2.0.2) $$\overline{\mathcal{F}}_p : \mathcal{O}_{\overline{X}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\overline{X}} \quad , \quad \overline{\mathcal{F}}_p(f) = f^p \quad .$$

Désignons par

$$H^\cdot_{et}(\overline{X},\ \mathbb{Z}/p\,\mathbb{Z})$$

les groupes de cohomologie étales à coefficients dans le faisceau constant $\mathbb{Z}/p\,\mathbb{Z}$. *Alors on a des isomorphismes canoniques* :

(2.0.3) $$H^i_{et}(\overline{X},\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \simeq (H^i(\overline{X},\mathcal{O}_{\overline{X}}))^{1-\overline{\mathcal{F}}_p} \quad .$$

Démonstration. On a une suite exacte de faisceaux sur $\overline{X}_{et}$.

(2.0.4) $$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O}_{\overline{X}} \xrightarrow{1-\mathcal{F}_p} \mathcal{O}_{\overline{X}} \longrightarrow 0$$

qui donne une suite exacte de cohomologie

(2.0.5) $$\ldots \longrightarrow H^i_{et}(\overline{X},\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \longrightarrow H^i_{et}(\overline{X},\mathcal{O}_{\overline{X}}) \xrightarrow{1-\mathcal{F}_p} H^i_{et}(\overline{X},\mathcal{O}_{\overline{X}}) \longrightarrow \ldots \quad .$$

On a $H^i_{et}(\overline{X},\mathcal{O}_{\overline{X}}) \simeq H^i(\overline{X},\mathcal{O}_{\overline{X}})$; c'est un k-vectoriel *de dimension finie* $\overline{X}$ étant propre. En appliquant 1.2, on trouve des suites exactes

(2.0.6) $$0 \longrightarrow H^i_{et}(\overline{X},\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \longrightarrow H^i(\overline{X},\mathcal{O}_{\overline{X}}) \xrightarrow{1-\mathfrak{F}_p} H^i(\overline{X},\mathcal{O}_{\overline{X}}) \longrightarrow 0 \quad ,$$

cqfd. Utilisant 1.1.10, on conclut de (2.0) :

<u>Corollaire</u> 2.1. <u>Pour</u> $\overline{X}$ <u>propre sur un corps séparablement clos</u> k,

(2.1.1) $$H^i(\overline{X},\mathcal{O}_{\overline{X}})_{ss} \xleftarrow{\sim} H^i_{et}(\overline{X},\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{F}_p} k \quad .$$

2.2. Soit maintenant $f : X \longrightarrow \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q)$ un schéma propre sur $\mathbb{F}_q$. Désignons par k une clôture algébrique de $\mathbb{F}_q$, et posons

(2.2.1) $$\overline{X} = X \times_{\mathbb{F}_q} k \quad .$$

Le faisceau étale $R^i f_*(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ sur $\mathrm{Sp}(\mathbb{F}_q)$ s'identifie à $H^i(\overline{X},\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$, vu comme $\mathrm{Gal}(k/\mathbb{F}_q)$ module. Désignons par

(2.2.2) $$\mathfrak{F}_q \ : \ H^i(X,\mathcal{O}_X) \longrightarrow H^i(X,\mathcal{O}_X)$$

l'opération linéaire (elle est q-linéaire, mais on est sur $\mathbb{F}_q$!) induite par

(2.2.3) $$\mathfrak{F}_q : \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X \quad , \quad \mathfrak{F}_q(f) = f^q \quad .$$

<u>Proposition</u> 2.2.4. <u>Désignons par</u> $\varphi_q \in \mathrm{Gal}(k/\mathbb{F}_q)$ <u>l'élément de</u> "<u>Frobenius</u>", $\varphi_q(\lambda) = \lambda^q$ <u>et soit</u> $i \in \mathbb{Z}$. <u>On a une identité de polynômes caractéristiques</u>

(2.2.4.1) $$\det_{\mathbb{F}_p}(1-t\varphi_q^{-1}|H^i_{et}(\overline{X},\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})) = \det_{\mathbb{F}_q}(1-t\,\mathfrak{F}_q|H^i(X,\mathcal{O}_X)) \quad .$$

<u>où le premier membre est le polynôme caractéristique de l'élément</u> φ_q^{-1} <u>dans</u> $\pi_1(\mathrm{Sp}(\mathbb{F}_q))$ <u>agissant sur le module galoisien</u> $H^i(\overline{X},\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$.

En effet, 2.2.4 est un corollaire de la

Proposition 2.2.5. Soit X propre sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q)$. Il y a un isomorphisme canonique

$$(2.2.6) \qquad H^i(X,\mathcal{O}_X)_{ss} \otimes_{\mathbb{F}_q} k \simeq H^i_{et}(\overline{X},\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{F}_p} k$$

qui transforme l'automorphisme $\mathfrak{F}_q \otimes_{\mathbb{F}_q} k$ du premier membre en l'automorphisme $\varphi_q^{-1} \otimes_{\mathbb{F}_q} k$ du second (qu'on peut aussi interpréter comme l'endomorphisme $fr_q^{X*} \otimes_{\mathbb{F}_p} k$, où $fr_q^X : \overline{X} \longrightarrow \overline{X}$ est le k-endomorphisme de Frobenius. cf. SGA 5, XVIII, 2.3.4).

Démonstration. Compte tenu de ce que

$$(2.2.7) \qquad H^i(\overline{X},\mathcal{O}_{\overline{X}}) \simeq H^i(X,\mathcal{O}_X) \otimes_{\mathbb{F}_q} k \quad ,$$

on a, par 1.0.10,

$$(2.2.8) \qquad H^i(\overline{X},\mathcal{O}_{\overline{X}})_{ss} \simeq H^i(X,\mathcal{O}_X)_{ss} \otimes_{\mathbb{F}_q} k \quad ,$$

de sorte qu'on obtient l'isomorphisme 2.2.6 en composant les isomorphismes 2.2.8 et 2.1.1.

Compte tenu de 2.2.7 l'opération q-linéaire

$$(2.2.9) \qquad \mathfrak{F}_q : H^i(X,\mathcal{O}_X) \longrightarrow H^i(X,\mathcal{O}_X)$$

admet une extension q-linéaire (cf. 1.0.5))

$$(2.2.10) \qquad \overline{\mathfrak{F}}_q : H^i(\overline{X},\mathcal{O}_{\overline{X}}) \longrightarrow H^i(\overline{X},\mathcal{O}_{\overline{X}}) \quad ,$$

et admet aussi une extension k-linéaire, notée encore $\mathfrak{F}_q$

$$(2.2.11) \qquad \mathfrak{F}_q : H^i(\overline{X},\mathcal{O}_{\overline{X}}) \longrightarrow H^i(\overline{X},\mathcal{O}_{\overline{X}}) \quad .$$

On désigne par

$$(2.2.12) \qquad \varphi_q : H^i(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}}) \longrightarrow H^i(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}})$$

l'opération q-linéaire dont les pointes fixes sont $H^i(X, \mathcal{O}_X)$. Les opérateurs $\mathfrak{F}_q$, φ_q et $\overline{\mathfrak{F}}_q$, moyennant (2.2.7), s'écrivent aussi $\mathfrak{F}_q \otimes id_k$, $id \otimes \varphi_q$, $\mathfrak{F}_k \otimes \varphi_k$, donc commutent entre eux, et on a

$$(2.2.13) \qquad \overline{\mathfrak{F}}_q = \varphi_q\, \mathfrak{F}_q = \mathfrak{F}_q \circ \varphi_q \quad ,$$

et ils commutent tous à $\overline{\mathfrak{F}}_p$, de sorte que $\mathfrak{F}_q$ et φ_q agissent sur $H^i(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}})^{1-\overline{\mathfrak{F}}_q}$ et sur $H^i(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}})^{1-\overline{\mathfrak{F}}_p}$. Or, $\mathfrak{F}_q$ et φ_q sont des inverses l'une à l'autre <u>sur</u> $H^i(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}})^{1-\overline{\mathfrak{F}}_q}$, par (2.2.13). Donc l'opération de $\mathfrak{F}_q$ sur

$$H^i(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}})_{ss} \simeq H^i(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}})^{1-\overline{\mathfrak{F}}_q} \otimes_{\mathbb{F}_q} k \qquad \text{(cf. 1.1.11)}$$

est l'inverse de l'opération de $\varphi_q \otimes k$ sur

$$H^i(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}})^{1-\overline{\mathfrak{F}}_q} \otimes_{\mathbb{F}_q} k \quad .$$

Ecrivant

$$(2.2.14) \qquad H^i(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}})^{1-\overline{\mathfrak{F}}_q} \simeq H^i(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}})^{1-\overline{\mathfrak{F}}_p} \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F}_q \quad ,$$

l'automorphisme φ_q de $H^i(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}})^{1-\overline{\mathfrak{F}}_q}$ devient, via 2.2.14, l'automorphisme $\varphi_q \otimes \mathbb{F}_q$ de $H^i(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}})^{1-\overline{\mathfrak{F}}_p} \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F}_q$, de sorte que l'automorphisme $\varphi_q \otimes k$ de $H^i(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}})_{ss}$ devient, via 2.1.1, l'automorphisme $\varphi_q \otimes k$ de $H^i_{et}(\overline{X}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{F}_p} k$, ce qui achève la démonstration (2.2.5).

3. La formule de congruence: énoncés et équivalences élémentaires

Je tiens à remercier Grothendieck et Deligne pour m'avoir expliqué les variantes (6.1.2), (3.1.1.2) et (3.1.3) de (3.1.1).

3.0. Soit X un schéma de type fini sur $\mathbb{F}_q$. On définit le degré d'un point fermé $y \in X$ comme le degré de son corps résiduel $\mathbb{F}_q(y)/\mathbb{F}_q$. On définit la fonction zêta de $X/\mathbb{F}_q$ comme élément de $\mathbb{Z}[[t]]$, par la formule (cf. aussi SGA 5 XIII 3.1)

(3.0.1) $$Z(t,X/\mathbb{F}_q) = \prod_y (1 - t^{\deg(y)})^{-1} \quad .$$

Par la "fonction zêta modulo p" on veut dire toujours l'image de $Z(t,X/\mathbb{F}_q)$ dans $\mathbb{F}_q[[t]]$ par la flèche de "réduction modulo p $\mathbb{Z}[[t]]$"

$$\mathbb{Z}[[t]] \longrightarrow \mathbb{F}_q[[t]] \quad .$$

Théorème 3.1. Soit X un schéma propre sur $\mathbb{F}_q$. Alors

(3.1.1) $$Z(t,X/\mathbb{F}_q) \equiv \prod_{i\geq 0} \det(1-t\,\mathfrak{F}_q|H^i(X,\mathcal{O}_X))^{(-1)^{i+1}} \mod p$$

ou, ce qui est équivalent par (2.2.4).

(3.1.2) $$Z(t,X/\mathbb{F}_q) \equiv \prod_{i\geq 0} \det(1-t\,\varphi_q^{-1}|\ H^i_{et}(\overline{X},\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}))^{(-1)^{i+1}} \mod p$$

Corollaire 3.2. Soit X un schéma propre sur $\mathbb{F}_q$.

Alors

(3.2.1) $$\sum_{i\geq 0} (-1)^i \operatorname{trace}(\mathfrak{F}_q|H^i(X,\mathcal{O}_X)) \equiv \# X(\mathbb{F}_q) \mod p$$

ou, ce qui est équivalent par (2.2.4)

$$\sum_{i\geq 0} (-1)^i \operatorname{tr}(\varphi_q^{-1} | H^i_{et}(\overline{X}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})) \equiv \# X(\mathbb{F}_q) \bmod p \quad . \tag{3.2.2}$$

On prend les coefficients de t dans les congruences (3.1.1) et (3.1.2).

Théorème 3.3. Soit X un schéma propre sur $\mathbb{F}_q$ on désigne par $H^i_{DR}(X/\mathbb{F}_q)$ les $\mathbb{F}_q$-vectoriels $\mathbb{H}^i(X, \Omega^{\bullet}_{X/\mathbb{F}_q})$, sur lesquels $\mathfrak{F}_q$ agit. On a

$$Z(t, X/\mathbb{F}_q) \equiv \prod_{i\geq 0} \det(1 - t\,\mathfrak{F}_q | H^i_{DR}(X/\mathbb{F}_q))^{(-1)^{i+1}} \quad \bmod p. \tag{3.3.1}$$

En effet, utilisant la suite spectrale

$$E_1^{p,q} = H^q(X, \Omega^p_{X/\mathbb{F}_q}) \Longrightarrow H^{p+q}_{DR}(X/\mathbb{F}_q) \tag{3.3.2}$$

sur laquelle $\mathfrak{F}_q$ agit (via l'endomorphisme $\mathfrak{F}_q = fr_p^{X*}$ déduit de $fr_q^X : X \longrightarrow X$) en tuant $E_1^{p,q}$ pour $q \neq 0$, on voit que (3.3.1) équivaut à (3.1.1).

Donnons un petit complément.

La formation de la "partie semi-simple" (cf. 1.0.7) étant un foncteur exact, on déduit de (3.3.2) une suite spectrale

$$(E_1^{p,q})_{ss} \Longrightarrow H^{p+q}_{DR}(X/\mathbb{F}_q)_{ss} \quad . \tag{3.3.3}$$

Comme $(E_1^{p,q})_{ss} = 0$ pour $q \neq 0$, on en déduit pour tout i un isomorphisme

$$H^i_{DR}(X/\mathbb{F}_q)_{ss} \xrightarrow{\ \sim\ } H^i(X, \mathcal{O}_X)_{ss} \quad , \tag{3.3.4}$$

commutant à $\mathfrak{F}_q$, d'où

$$\det(1 - t\,\mathfrak{F}_q | H^i_{DR}(X/\mathbb{F}_q)) \equiv \det(1 - t\,\mathfrak{F}_q | H^i(X, \mathcal{O}_X)) \quad . \tag{3.3.5}$$

Théorème 3.4. Soit X un schéma séparé de type fini sur $\mathbb{F}_q$. Alors désignant par H_c^i la cohomologie étale à supports propres (SGA 4 XVII 5.1.9 (iii)), on a

$$(3.4.1) \qquad Z(t,X/\mathbb{F}_q) \equiv \prod_{i\geq 0} \det(1-t\,\varphi_q^{-1}|H_c^i(\bar{X},\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}))^{(-1)^{i+1}} \mod p.$$

Commençons par démontrer l'équivalence de (3.4.1) et (3.1.1).

Ecrivons, pour le moment

$$(3.4.2) \qquad Z(X) \text{ au lieu de } Z(t,X/\mathbb{F}_q)$$

$$(3.4.3) \qquad Z'(X) \text{ au lieu de } \prod \det(1-t\,\varphi_q^{-1}|H_c^i(\overline{X},\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}))^{(-1)^{i+1}}.$$

Lemme 3.5. Si $\{U_i\}$ est un recouvrement fini de X par des sous-schémas ouverts on a

$$(3.5.1) \qquad Z'(X) = \prod_{j\geq 0} \prod_{1\leq i_0<\ldots<i_j\leq n} Z'(U_{i_0}\cap\ldots\cap U_{i_j})^{(-1)^j}.$$

Démonstration. Résulte facilement de la suite spectrale de localisation (SGA 4 XVII 6.2.10)

$$E_1^{-a,b} = \bigoplus_{i_0<\ldots<i_b} H_c^a(\overline{U}_{i_0}\cap\ldots\cap\overline{U}_{i_b},\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \Longrightarrow H_c^{-a+b}(\overline{X},\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}).$$

On peut aussi l'obtenir par récurrence sur n, en appliquant 3.6 ci-dessous.

Lemme 3.6. Si U est un ouvert de X, Y le fermé X-U,

$$(3.6.1) \qquad Z'(X) = Z'(U)\,Z'(Y)$$

Démonstration. Résulte de la suite exacte de cohomologie

$$(3.6.2) \qquad \longrightarrow H_c^i(\overline{U},\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \longrightarrow H_c^i(\overline{X},\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \longrightarrow H_c^i(\overline{Y},\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \longrightarrow .$$

<u>Lemme</u> 3.7 (Moebius). <u>Soit</u> B <u>un ensemble fini</u>, $\{A_i\}$ <u>un recouvrement fini par des sous-ensembles</u>. <u>Alors</u>

$$(3.7.1)\qquad \mathrm{card}(B) = \sum_{j\geq 0} (-1)^j \sum_{i_o<\ldots<i_j} \mathrm{card}(A_{i_o}\cap\ldots\cap A_{i_j}) .$$

<u>Démonstration</u>. On a la suite spectrale de Leray pour la cohomologie rationnelle de l'espace discret B et le recouvrement ouvert $\{A_i\}$

$$E_1^{p,q} = \bigoplus_q H^p(A_{i_o}\cap\ldots\cap A_{i_q}, \mathbb{Q}) \Longrightarrow H^{p+q}(B,\mathbb{Q})$$

et on calcule la caractéristique d'Euler-Poincaré de B.

<u>Lemme</u> 3.8. <u>Si</u> $\{U_i\}$ <u>est un recouvrement fini de</u> X <u>par des sous-schémas</u>, <u>alors</u>

$$(3.8.1)\qquad Z(X) = \prod_{j\geq 0}\ \prod_{i_o<\ldots<i_j} Z(U_{i_o}\cap\ldots\cap U_{i_j})^{(-1)^j} .$$

<u>Démonstration</u>. On a la formule

$$(3.8.2)\qquad \mathrm{card}(X(\mathbb{F}_{q^n})) = \sum_{r|n} r.\mathrm{card}\{y\in X|\deg(y)=r\}$$

qui entraîne

$$(3.8.3)\qquad Z(X) = \exp\Big(\sum_{n\geq 1} \mathrm{card}(X(\mathbb{F}_{q^n}))\,\frac{t^n}{n}\Big) ,$$

et on conclut par 3.7.1.

<u>Lemme</u> 3.9. <u>Supposons que la formule</u> (3.4.1) (<u>ou ce qui revient au même</u>, (3.1.2) <u>i.e.</u> (3.1.1)) <u>soit vraie pour</u> X <u>une hypersurface projective</u>. <u>Alors elle est vraie pour tout</u> X <u>séparé de type fini</u>.

Démonstration. Par 3.8 et 3.6, (3.4.1) est vraie pour le complémentaire d'une hypersurface, $\mathbb{P}^n$-H. Compte tenu de ce que $\bigcap_i(\mathbb{P}^n - H_i) = \mathbb{P}^n - \bigcup_i H_i$ est encore le complément d'une hypersurface, le recouvrement ouvert $\{\mathbb{P}^n - H_i\}$ de $\mathbb{P}^n - \bigcap H_i$ permet d'appliquer 3.8 et 3.5 pour déduire (3.1.3) pour $\mathbb{P}^n - \bigcap H_i$. Par 3.8 et 3.6, (3.4.1) est vrai pour $\bigcap H_i$, i.e. pour tout X projectif. Une nouvelle application de 3.8 et 3.5 donne 3.1.3 pour tout X quasi-projectif, en particulier pour tout X affine. Finalement, pour X séparé de type fini, on prend un recouvrement fini par des ouverts affines, et on applique 3.8 et 3.5.

4. Le calcul de la fonction zêta d'une hypersurface à la Dwork

4.0. Soit

(4.0.1) $$f(X) = f(X_1,\ldots,X_{n+2}) \in \mathbb{F}_q[X] \text{ homogène de degré } d,$$

dont l'annulation définit l'hypersurface $V \subset \mathbb{P}^{n+1}$, et désignons par V^* l'ouvert de V où $\prod_{i=1}^{n+2} X_i$ est inversible, V^*_{aff} le cône affine de V^*.

Choisissons un caractère additif non-trivial

(4.0.2) $$\chi : \mathbb{F}_{q^\nu} \longrightarrow \mu_p(C),$$

C étant un corps alg. clos fixé de car. nulle (p.ex. $C = \mathbb{C}$), de sorte qu'on a

(4.0.3) $$\text{pour } x \in \mathbb{F}_{q^\nu} \quad \sum_{y \in \mathbb{F}_{q^\nu}} \chi(xy) = \begin{cases} q^\nu & \text{si } \chi = 0 \\ 0 & \text{si } \chi \neq 0 \end{cases} .$$

Pour $\chi = (\chi_1,\ldots,\chi_{n+2}) \in (\mathbb{F}^*_{q^\nu})^{n+2}$, on a donc

$$(4.0.4)\qquad 1+\sum_{x_o\in\mathbb{F}^*_{q^\nu}}\chi(x_o f(x)) = \sum_{x_o\in\mathbb{F}_{q^\nu}}\chi(x_o f(x)) = \begin{cases} q^\nu & \text{si } f(x)=0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}.$$

En sommant (4.0.4) sur $\mathbf{x}\in(\mathbb{F}^*_{q^\nu})^{n+2}$, on obtient

$$(4.0.5)\qquad \operatorname{card} V^*_{aff}(\mathbb{F}_{q^\nu}) = \frac{1}{q^\nu}\sum_{\mathbf{x}\in(\mathbb{F}^*_{q^\nu})^{n+2}}\{1+\sum_{\mathbf{x}_o\in\mathbb{F}^*_{q^\nu}}\chi(\mathbf{x}_o f(x))\}$$

et, compte tenu de ce que

$$(4.0.6)\qquad \operatorname{card} V^*_{aff}(\mathbb{F}_{q^\nu}) = (q^\nu-1)\operatorname{card} V^*(\mathbb{F}_{q^\nu})$$

(4.0.5) se récrit

$$(4.0.7)\qquad (q^\nu-1)\operatorname{card}V^*(\mathbb{F}_{q^\nu}) = \frac{(q^\nu-1)^{n+2}}{q^\nu}+\frac{1}{q^\nu}\sum_{(x_o,x)\in(\mathbb{F}^*_{q^\nu})^{n+3}}\chi(x_o f(x)).$$

Ecrivons explicitement la forme f(X) comme somme de monômes

$$(4.0.8)\qquad f(X) = \Sigma\, a_w X^w ,$$

où

$\mathbf{w}=(w_1,\dots,w_{n+2})$ avec $\Sigma w_i = d$, $X^w \overset{dfn}{=} X_1^{w_1}\dots X_{n+2}^{w_{n+2}}$,

de sorte que (4.0.7) se récrit

$$(4.0.9)\qquad (q^\nu-1)\operatorname{card} V^*(\mathbb{F}_{q^\nu}) = \frac{(q^\nu-1)^{n+2}}{q^\nu}+\frac{1}{q^\nu}\sum_{(x_o,x)\in(\mathbb{F}^*_{q^\nu})^{n+3}}\prod_w \chi(a_w x_o x^w).$$

4.1. Il faut maintenant expliciter notre "caractère additif à valeurs en caractéristique zéro". On a envie de prendre simplement

$$(4.1.0)\qquad \chi : \mathbf{x}\longmapsto \exp(2\pi i\operatorname{tr}_{\mathbb{F}_{q^\nu}/\mathbb{F}_p}(\mathbf{x})) = \xi_p^{\operatorname{tr}_{\mathbb{F}_{q^\nu}/\mathbb{F}_p}(x)} .$$

Désignons par

(4.1.1) Ω la clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$

(4.1.2) $\mathrm{ord} : \Omega^* \longrightarrow \mathbb{Q}$ l'ordinal, normalisé par $\mathrm{ord}(p) = 1$

(4.1.3) $\xi_p \in \Omega$ une racine p-ième primitive de l'unité.

On constate (cf. [2]) qu'il existe

(4.1.4) $\pi \in \mathbb{Q}_p(\xi_p)$, $\mathrm{ord}(\pi) = \dfrac{1}{p-1}$

(4.1.5) tel que $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{\pi^{p^n}}{p^n} = 0$,

(NB. On constate aussitôt que le premier membre converge dans $Q_p(\xi_p)$.)

On définit <u>l'exponentielle d'Artin-Hasse</u>

(4.1.6) $$E(X) = \exp\left(\sum_{n\geq 0} \frac{X^{p^n}}{p^n}\right) \in Q_p[[X]]$$

qui, oh miracle, se trouve dans $\mathbb{Z}_p[[X]]$. On définit

(4.1.7) $\Theta(X) = E(\pi X)$,

dont les propriétés fondamentales sont résumées dans le lemme suivant :

<u>Lemme</u> 4.2.

(4.2.1) $\Theta(X) = \sum B_n X^n$, $B_o = 1$ $A_1 = \pi$, $\mathrm{ord}(B_n) \geq \dfrac{n}{p-1}$.

(4.2.2) $\Theta(1) = \xi_p$, <u>une racine p'ième primitive de l'unité.</u>

(4.2.3) <u>Soit</u> $t \in \Omega$, <u>et supposons que, pour un entier</u> $a > 0$ <u>donné</u>, $t = t^{p^a}$ <u>(i.e. t est un "représentant de Teichmüller" dans</u> $W(\mathbb{F}_{q^a}) \subset \Omega$). <u>Alors</u> $\sum_{j=0}^{a-1} t^{p^j} \in \mathbb{Z}_p$, <u>de sorte qu'on peut définir la série formelle</u>

$(\Theta(X))^{\sum_{j=0}^{a-1} t^{p^j}}$, et on a une identité de séries formelles

$$(4.2.3.1) \qquad \prod_{j=0}^{a-1} \Theta(t^{p^j} X) = (\Theta(X))^{\sum_{j=0}^{a-1} t^j} .$$

<u>Démonstration</u>. Compte tenu de ce qui $E(X) \in \mathbb{Z}_p[[X]]$, (4.2.1) se déduit de la définition. Quant à (4.2.2), on a

$$(4.2.4) \qquad \log(\Theta(1)) = 0 \qquad \text{par le choix de } \pi \text{ (4.1.5)}$$

et

$$(4.2.5) \qquad \operatorname{ord}(\Theta(1) - 1) = \frac{1}{p-1} \quad \text{par (4.2.1).}$$

Par (4.2.4), il existe un entier $n \geq 0$ tel que $\Theta(1)^{p^n} = 1$, (c'est la caractérisation du noyau du logarithme) et (4.2.5) entraîne que $n = 1$.

Quant à (4.2.3.1), en prenant les logarithmes, il résulte d'un calcul évident, une fois prouvé que l'on a bien $\sum_{j=0}^{a-1} t^{p^j} \in \mathbb{Z}_p$. Or on voit aussitôt que les t^{p^j} $(0 \leq j \leq a-1)$ sont les conjugués de $t \in W(\mathbb{F}_{q^a})$ sur $\mathbb{Z}_p$, donc $\sum_{j=0}^{a-1} t^{p^j} = \mathrm{Tr}_{W(\mathbb{F}_{q^a})/\mathbb{Z}_p}(t) \in \mathbb{Z}_p$.

En prenant la valeur en $X = 1$ des deux membres de (4.2.3.1) nous trouvons le

<u>Corollaire</u> 4.3. <u>Soit</u> $t \in \Omega$ <u>vérifiant</u> $t^{p^a} = t$. <u>Désignons par</u> $\bar{t} \in \mathbb{F}_{p^a}$ <u>sa classe résiduelle. Alors on a</u>

$$(4.3.1) \qquad \prod_{j=0}^{a-1} \Theta(t^{p^j}) = \xi_p^{\mathrm{tr}_{\mathbb{F}_{p^a}/\mathbb{F}_p}(\bar{t})} .$$

4.4. Rappelons que le corps résiduel de l'anneau des entiers de $\mathbb{Q}_p(\xi_p)$ est $\mathbb{F}_p$. Soient

(4.4.0) $\qquad K$ = l'extension non-ramifiée de $\mathbb{Q}_p(\xi_p)$ à corps résiduel $\mathbb{F}_q$,

(4.4.1) $\qquad \tau \in \mathrm{Gal}\left(K/\mathbb{Q}_p(\xi_p)\right)$ le "Frobenius", i.e. l'automorphisme se réduisant suivant l'automorphisme de Frobenius de $\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p$, $x \longmapsto x^p$,

(4.4.2) $\qquad$ Soit $F(X) = \sum A_W X^W$ le relèvement en $K[X_1,\ldots,X_{n+2}]$ de $f(X)$ dont les coefficients vérifient $A_W^q = A_W$. Mettant ensemble (4.3.1) et (4.0.9), on trouve (compte tenu de la définition (4.1.0) de X) :

$$(4.4.3)\quad \begin{cases} (q^\nu-1)\,\mathrm{card}\, V^*(\mathbb{F}_{q^\nu}) - \dfrac{(q^\nu-1)^{n+2}}{q^\nu} \\ = \dfrac{1}{q^\nu} \displaystyle\sum_{(X_o,X)\in(\mu_{q^\nu-1}(\Omega))^{n+3}} \prod_W \prod_{j=0}^{\mathrm{ord}(q^\nu)-1} \Theta(A_W^{p^j} X_o^{p^j} X^{p^j W}) \end{cases} .$$

Définissons

$$H(X) = H(X_o,\ldots,X_{n+2}) \in K[[X_o,\ldots,X_{n+2}]]$$

par

$$(4.4.4)\qquad H(X) = \prod_W \Theta(A_W X_o X_1^{W_1} \ldots X_{n+2}^{W_{n+2}}) \quad .$$

Nous faisons agir $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}_p(\xi_p))$ sur $K[[X_o,\ldots,X_{n+2}]]$ à travers son action sur les coefficients ; l'action composante de $\sigma \in \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}_p(\xi_p))$ sera notée

$$(4.4.5)\qquad G(X) \longmapsto G^\sigma(X) \quad .$$

On a en particulier

$$H^{\tau^j}(X) = \prod_W \Theta \left(A_W^{\tau^j} X_o X_1^{W} \dots X_{n+2}^{W_{n+2}}\right) .$$

Compte tenu de ce que $A_W^{\tau^j} = A_W^{p^j}$, (4.4.3) se récrit alors

(4.4.6) $(q^\nu-1)\mathrm{Card}\, V^*(\mathbb{F}_{q^\nu}) =$

$$\frac{(q^\nu-1)^{n+2}}{q^\nu} + \frac{1}{q^\nu} \sum_{(X_o,X)\in(\mu_{q^\nu-1}(\Omega))^{n+3}} \prod_{j=0}^{\mathrm{ord}(q^\nu)-1} H^{\tau^j}(X^{p^j})$$

4.5. Nous allons maintenant exprimer la somme dans (4.4.6) comme une trace.

Pour chaque $b \in \mathbb{Q}$, on définit une K-algèbre de Banach p-adique

(4.5.1) $L(b)$ = le sous-anneau de $K[[X_o,\dots,X_{n+2}]]$ formé des séries

qui s'écrivent

(4.5.2) $$\sum_{d\,U_o = \sum_{i\geq 1} U_i} B_U X_o^{U_o} X_1^{U_1} \dots X_{n+2}^{U_{n+2}} \qquad (U = (U_o,\dots,U_{n+2}))$$

et qui vérifient

(4.5.3) $$\inf_U (\mathrm{ord}(B_U) - b\, U_o) > -\infty .$$

C'est une **algèbre** de Banach p-adique pour la fonction d'ordinal (l'opposé du logarithme de la norme)

(4.5.4) $$\inf_U \ (\mathrm{ord}\,(B_U) - bU_o) = \mathrm{ord}\,(\,\Sigma\, B_U X^U) .$$

On vérifie sur 4.4.4 et (4.2.1) que l'on a

$$H(X) \in L\left(\frac{1}{p-1}\right) .$$

Introduisons des opérateurs.

Pour chaque entier $k > 0$, on introduit un opérateur continu d'espaces de Banach sur K

$$(4.5.5) \qquad \begin{cases} \Psi_k : L(b) \longrightarrow L(k\, b) \\ \\ \Psi_k \, (\Sigma\, B_U X^U) = \Sigma\, B_{kU} X^U \end{cases} .$$

Pour chaque couple (b,b'), $b' < b$, il y a un <u>opérateur de "restriction"</u> qui est complètement continu (i.e. une limite uniforme des opérateurs de rang fini)

$$(4.5.6) \qquad \begin{cases} L(b) \xrightarrow{\text{"restriction"}} L(b') \\ \\ \Sigma\, B_U X^U \longmapsto \Sigma\, B_U X^U \end{cases} .$$

Chaque élément G de l'algèbre $L(b)$ donne l'endomorphisme continu de la multiplication par G

$$(4.5.7) \qquad \begin{matrix} G \; : \; L(b) \longrightarrow L(b) \\ \\ \eta \longmapsto \eta\, G \end{matrix} .$$

Ces opérateurs sont liés par le lemme suivant, dont la démonstration se trouve dans [2] (cf. aussi [4]).

Lemme 4.5.8 (ou lemme de la trace (DWORK)). Soient $b \in \mathbb{Q}$, $b > 0$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 2$, et $G \in L(b/k)$. Alors le composé

$$L(b) \xrightarrow{\text{"restriction"}} L(b/k) \xrightarrow{\times G} L(b/k) \xrightarrow{\Psi_k} L(b) \quad ,$$

noté $\Psi_k \circ G$, est complètement continu, et sa trace [cf. [4]] est donnée par la formule

$$(4.5.9) \qquad \operatorname{tr}(\Psi_k \circ G) = \frac{1}{(k-1)^{n+2}} \sum_{X \in (\mu_{k-1}(\Omega))^{n+3}} G(X) \quad .$$

Appliquant ce lemme au cas

$$\begin{cases} k = q^{\nu} \\ G(X) = \prod_{j=0}^{\operatorname{ord}(q^{\nu})-1} H^{\tau^j}(X^{p^j}) \in L\left(\frac{p}{(p-1)q^{\nu}}\right) \\ b = \frac{1}{p-1} \end{cases}$$

(4.4.6) se récrit

$$(4.5.10) \quad (q-1)\operatorname{card} V^*(\mathbb{F}_{q^{\nu}}) = \frac{(q^{\nu}-1)^{n+2}}{q^{\nu}} + \frac{(q^{\nu}-1)^{n+3}}{q^{\nu}} \operatorname{tr}\left(\Psi_q \prod_{j=0}^{\operatorname{ord}(q^{\nu})-1} H^{\tau^j}(X^{p^j}) \,\Big|\, L\left(\frac{1}{p-1}\right)\right).$$

Soit $L^0(b)$ l'idéal des éléments de $L(b)$ qui "s'annulent en O", i.e. "sans terme constant". Il est stable sous $\Psi \circ G$, et on a évidemment

$$(4.5.11) \qquad \operatorname{tr}(\Psi_k \circ G) = G(0) + \operatorname{tr}(\Psi_k \circ G \,|\, L^0) \quad .$$

Compte tenu de ce que $H(0) = 1$, (4.5.10) se récrit

$$(4.5.12) \quad \operatorname{card} V^*(\mathbb{F}_{q^{\nu}}) = (q^{\nu}-1)^{n+1} + \frac{(q^{\nu}-1)^{n+2}}{q} \operatorname{tr}\left(\Psi_q \circ \prod_{j=0}^{\operatorname{ord}(q^{\nu})-1} H^{\tau^j}(X^{p^j}) \,\Big|\, L^0\left(\frac{1}{p-1}\right)\right).$$

Considérons maintenant l'opérateur τ^{-1}-linéaire

(4.5.13) $$\tau^{-1} \circ \Psi_p \circ H(X) : L(b) \longrightarrow L(b) \quad .$$

On constate que ses itérés sont donnés par

(5.4.14) $$(\tau^{-1} \circ \Psi_p \circ H(X))^a = \tau^{-a} \circ \Psi_{p^a} \circ H(X) H^{\tau}(X^p) \dots H^{\tau^{a-1}}(X^{p^{a-1}}) \ ,$$

et on note que, si $\mathrm{ord}(q) | a$, on a $\tau^{-a} = \mathrm{id}$. Ceci posé, on définit une opération τ^{-1}-linéaire

(4.5.15) $$\begin{cases} \alpha : L^o\left(\frac{1}{p-1}\right) \longrightarrow L^o\left(\frac{1}{p-1}\right) \\ \alpha = \frac{1}{p} \tau^{-1} \circ \Psi_p \circ H(X) \quad , \end{cases}$$

de sorte que (4.5.12) se récrit

(4.5.16) $$\mathrm{card}\, V^*(\mathbb{F}_{q^\nu}) = (q^\nu - 1)^{n+1} + (q^\nu - 1)^{n+2} \mathrm{tr}((\alpha)^{\mathrm{ord}(q^\nu)} | L^o\left(\frac{1}{p-1}\right) \quad .$$

Désignons par

(4.5.17) $$S = \text{l'ensemble } \{1, \dots, n+2\} \quad .$$

Pour tout sous-ensemble $A \subset S$, $A \neq \emptyset$, on définit un sous-espace de $L(b)$:

(4.5.18) $L^A(b)$ = ensemble des séries $\sum B_U X^U \in L(b)$ telles que, pour chaque monôme X^U avec $B_U \neq 0$, les $U_i > 0$ sont exactement U_o et les U_j , $j \in A$.

On a

(4.5.19) $$L^o(b) = \bigoplus_{\substack{A \subset S \\ A \neq \emptyset}} L^A(b)$$

et, pour chaque sous-ensemble

$$B \subset S, \quad B \neq \emptyset ,$$

on a

(4.5.20) $$\bigoplus_{A \supset B} L^A(b) = L(b) \cap \text{l'idéal } (\prod_{i \in B} X_i)\, K[[X]] \quad .$$

Evidemment chaque sous-espace $\bigoplus_{A \subseteq B} L^A(b)$ est stable par α ; il en résulte qu'il en est de même pour $\bigoplus_{A \supsetneq B} L^A(b)$, qui est somme de sous-espaces du type précédent.

On définit

(4.5.21) α_B = l'endomorphisme τ^{-1}-linéaire induit par α sur

$$\bigoplus_{A \supset B} L^A\left(\frac{1}{p-1}\right) \Big/ \bigoplus_{A \supsetneq B} L^A\left(\frac{1}{p-1}\right) \simeq L^B\left(\frac{1}{p-1}\right) .$$

Explicitement, on obtient α_B par la formule

(4.5.22) $$\alpha_B = \frac{\tau^{-1}}{p} \Psi_p H_B(X),$$ opération sous laquelle L^B est stable,

où $H_B(X)$ se déduit de $H(X)$ en y faisant la substitution $X_i = 0$ pour $i \notin \{0\} \cup B$.

Récrivons encore (4.5.16)

(4.5.2.3) $$\text{card } V^*(\mathbb{F}_{q^\nu}) = (q^\nu - 1)^{n+1} + (q^\nu - 1)^{n+2} \sum_{\substack{A \subset S \\ A \neq \emptyset}} \operatorname{tr}((\alpha_A)^{\operatorname{ord}(q^\nu)}) .$$

Définissons, pour $A \subset S$, $A \neq \emptyset$, l'hypersurface

(4.5.24) $$V_A \subset \mathbb{P}^{\operatorname{card}(A)-1} \simeq \mathbb{P}^{n+1} \cap \{X_i = 0 \ \forall i \notin A\}$$

définie par $f_A(X)$, le polynôme déduit de $f(X)$ y faisant la substitution en $X_i = 0$ pour $i \notin A$.

Compte tenu de la compatibilité de la formation de la série H à partir de $f(X)$ à l'opération de substitution de 0 pour certaines des variables (4.5.23) donne, pour chaque $A \subseteq S$, $A \neq \emptyset$

$$(4.5.25) \quad \operatorname{card}\,(V_A^*(\mathbb{F}_{q^\nu})) = (q^\nu - 1)^{\operatorname{car}(A)-1} + (q^\nu - 1)^{\operatorname{card}(A)} \sum_{B \subset A} \operatorname{tr}((\alpha_B))^{\operatorname{ord}(q^\nu)}) \ .$$

D'autre part, on a

$$(4.5.26) \qquad \operatorname{card}\, V(\mathbb{F}_{q^\nu}) = \sum_{\substack{A \subset S \\ A \neq \emptyset}} \operatorname{card}\, V_A^*(\mathbb{F}_{q^\nu}) \ .$$

Après une sommation facile, (4.5.25) donne alors

$$(4.5.27) \quad \operatorname{card}\, V(\mathbb{F}_{q^\nu}) = 1 + q^\nu + q^{2\nu} + \dots + q^{\nu(\operatorname{card}(S)-1)}$$

$$+ \sum_{\substack{B \subseteq S \\ B \neq \emptyset}} (q^\nu - 1)^{\operatorname{card}(B)} q^{\nu \operatorname{card}(S-B)} \operatorname{tr}\left((\alpha_B)^{\operatorname{ord}(q^\nu)} \right) .$$

Notons que α donc les α_B étant τ^{-1} linéaire, les $\alpha_B^{\operatorname{ord}(q)}$ sont K-linéaires. Définissons alors les séries caractéristiques

$$(4.5.28) \qquad \Delta_B(t) \in 1 + t\,K[[t]]$$

$$\Delta_B(t) = \det\left(1 - t\,\alpha_B^{\operatorname{ord}(q)} \mid L^B\left(\frac{1}{p-1}\right)\right) \ .$$

Introduisons des endomorphismes de $1 + tK[[t]]$

$$(4.5.29) \qquad \varphi : g(t) \longmapsto g^\varphi(t) = g(qt)$$

et

$$(4.5.30) \qquad \delta = 1 - \varphi : g(t) \longmapsto g^\delta(t) = g(t)/g(qt)$$

Compte tenu de ce que

(4.5.31) $$Z(t,\ V/\mathbb{F}_q) = \exp\left(\sum_{\nu\geq 1} \operatorname{card}\ (V(\mathbb{F}_{q^\nu}))\ \frac{t^\nu}{\nu}\right)$$

et

(4.5.32) $$\det(1-t\ \alpha_B^{\operatorname{ord}(q)}) = \exp\left(-\sum_{\nu\geq 1} \operatorname{tr}((\alpha_B)^{\nu \operatorname{ord} q})\ \frac{t^\nu}{\nu}\right)$$

(4.5.27) se récrit

(4.5.23) $$Z(t,V/\mathbb{F}_q) \prod_{i=0}^{n+1} (1-q^i t) = \prod_{j=1}^{n+2} \left(\prod_{\substack{B\subset S\\ \operatorname{card}(B)=j}} \Delta_B(t)\right)^{-(-\delta)^j \varphi^{n+2-j}} .$$

4.6. Nous allons étudier maintenant l'intégralité des séries Δ_B . Posons

(4.6.1) $\mathcal{O}$ = l'anneau des entiers de K

et définissons une filtration sur $1 + t\ \mathcal{O}[[t]]$ par

(4.6.2) $$F^i(1 + t\ \mathcal{O}[[t]]) = 1 + q^i t\ \mathcal{O}[[q^i t]]$$
$$= \varphi^i(1+t\ \mathcal{O}[[t]]) .$$

On a

(4.6.3) $$\varphi(F^i) \subset F^{i+1}$$

(4.6.4) $$\delta(F^i) \subset F^i$$

(4.6.5) δ induit l'identité sur F^i/F^{i+1} .

Lemme 4.6.6. *$\Delta_B(t) \in 1 + t\ \mathcal{O}[[t]]$, et si un entier j vérifie*

(4.6.7) $$jd < \operatorname{card}(B)$$

alors on a

(4.6.8) $$\Delta_B(t) \in F^j(1 + t\ \mathcal{O}[[t]]) .$$

Démonstration. Les espaces de Banach $L^B\left(\frac{1}{p-1}\right)$ sont tous "du type B(I)" au sens de Serre [7], i.e. ils admettent des "bases orthonormales", à savoir, les monômes

(4.6.9) $$\pi^{U_o} X_o^{U_o} X_1^{U_1} \ldots X_{n+2}^{U_{n+2}}$$

qui y appartiennent. Que c' une base "orthonormale" veut dire par définition qu'on a

(4.6.10) $$\operatorname{ord}(\Sigma\, C_U\, \pi^{U_o} X_o^{U_o} \ldots X_{n+2}^{U_{n+2}}) = \min_U \operatorname{ord}(C_U) \quad .$$

Soit

(4.6.11) $$R_B = \text{le } \mathcal{O}\text{-sous-module de } L^B\left(\frac{1}{p-1}\right) \text{ formé des éléments}$$

d'ordinal ≥ 0. Pour démontrer le lemme, il suffit de démontrer

(4.6.12) si $jd < \operatorname{card}(B)$, alors $(\alpha_B)^{\operatorname{ord}(q)}\, R_B \subset q^j R_B$

ou, a fortiori, de démontrer

(4.6.13) si $jd < \operatorname{card}(B)$, alors $\alpha_B(R_B) \subset p^j R_B$.

Or, on a (4.5.22)

(4.6.14) $$\alpha_B = \frac{\tau^{-1}}{p}\, \Psi_p \circ H_B(X) \quad .$$

Compte tenu de ce que

(4.6.15) $$H(X) \in L\left(\frac{1}{p-1}\right),\ \operatorname{ord}(H(X)) \geq 0$$

on a

(4.6.16) $$H_B(X) \cdot R_B \subset R_B$$

et évidemment

(4.6.17) $$\tau^{-1}(R_B) = R_B \quad ,$$

de sorte que (4.6.13) sera conséquence de

(4.6.18) si $jd < \mathrm{card}(B)$, alors $\Psi_p(R_B) \subset p^{j+1}R_B$.

Vérifions (4.6.18) monôme par monôme. On a

$$(4.6.19)\quad \begin{cases} \Psi_p(\pi^{U_o}X^{U_o}\ldots X_{n+2}^{U_{n+2}}) = 0, \text{ sauf si } \forall i \quad p \mid U_i \\ \text{et} \\ \Psi_p(\pi^{pU_o}X_o^{pU_o}\ldots X_{n+2}^{pU_{n+2}}) = \pi^{(p-1)U_o}\,.\,\underbrace{\pi^{U_o}X_o^{U_o}\ldots X_{n+2}^{U_{n+2}}}_{\in R_B} \end{cases} .$$

Or, les conditions pour que l'on ait $X_o^{U_o}\ldots X_{n+2}^{U_{n+2}} \in L^B\left(\frac{1}{p-1}\right)$ sont

$$(4.6.20)\quad \begin{cases} dU_o = \sum_{i\geq 1} U_i \;, \\ \text{pour } i \geq 1, \text{ on a } U_i > 0 \Leftrightarrow i \in B \end{cases}$$

d'où, en particulier,

$$(4.6.21)\qquad dU_o \geq \mathrm{card}(B) \quad .$$

On a donc

$$(4.6.22)\qquad \mathrm{ord}(\pi^{(p-1)U_o}) = U_o \geq \frac{\mathrm{card}(B)}{d} > j$$

et, comme $U_o \in \mathbb{Z}$,

$$(4.6.23)\qquad \mathrm{ord}(\pi^{(p-1)U_o}) = U_o \geq j+1.$$

Mettant ceci ensemble avec (4.6.19), on trouve (4.6.18).

5. Un théorème d'AX [1], (cf. aussi [4], section 7).

Théorème 5.0. Soient V une hypersurface dans $\mathbb{P}^{n+1}$ de degré $d > 0$, définie sur $\mathbb{F}_q$, et j un entier : si on a

(5.0.1) $$j\,d < n+2 \quad ,$$

alors

(5.0.2) $$Z(t,V/\mathbb{F}_q)\prod_{i=0}^{n+1}(1-q^i t) \in 1 + q^j t\,\mathbb{Z}[[q^j t]] \quad .$$

et l'inverse de tout zéro ou pôle de

(5.0.3) $$Z(t,V/\mathbb{F}_q)\prod_{i=0}^{n+1}(1-q^i t)$$

est de la forme q^j.(un entier algébrique).

Théorème 5.0.bis. Soit V_{aff} une hypersurface dans $\mathbb{A}^{n+2}$ définie par une forme homogène de degré d, définie sur $\mathbb{F}_q$. Si on a

(5.0.7) $$j\,d < n+2$$

alors

(5.0.5) $$Z(t, V_{aff}/\mathbb{F}_q) \in 1 + q^j t\,\mathbb{Z}[[q^j t]] \quad .$$

En particulier,

(5.0.6) $$\operatorname{card}(V_{aff}(\mathbb{F}_q)) \equiv 0 \mod q^j \quad ,$$

et par suite

(5.0.6 bis) $$\operatorname{card}(V(\mathbb{F}_q)) \geq \frac{q^j-1}{q-1} > 0$$

(ce qui améliore le th. de CHEVALLEY-WARNING [8]).

<u>Démonstration</u>. L'implication (5.0.5) $\Longrightarrow$ (5.0.6) est claire, en prenant le coefficient de t dans la fonction zêta. Les assertions (5.0.4) et (5.0.2) sont équivalentes, compte tenu de ce que

$$(5.0.7) \qquad \operatorname{card} V_{aff}(\mathbb{F}_{q^\nu}) = 1 + (q^\nu - 1) \operatorname{card} V(\mathbb{F}_{q^\nu}) \quad ,$$

d'où

$$(5.0.8) \qquad Z(t, V_{aff}/\mathbb{F}_q) = \frac{Z(t, V/\mathbb{F}_q)}{Z(qt, V/\mathbb{F}_q)(1-t)}$$

et

$$(5.0.9) \quad Z(t, V/\mathbb{F}_q) = \prod_{i \geq 0} \left[(1-q^i f)\, Z(q^i t, V_{aff}/\mathbb{F}_q) \right] \quad .$$

Les énoncés (5.0.2) et (5.0.3) sont équivalents encore, par le théorème de Fatou [3], grâce à la rationalité de la fonction zêta. Comme on a

$$(5.0.10) \qquad Z(t, V/\mathbb{F}_q) \in \mathbb{Z}[[t]] \quad ,$$

il suffira de démontrer

$$(5.0.11) \quad Z(t, V/\mathbb{F}_q) \prod_{i=0}^{n+1} (1-q^i t) \in F^j(1+t\, \mathcal{O}[[t]]) \quad .$$

Compte tenu de (4.5.33) et (4.6.4) - (4.6.5), il suffit de démontrer, pour $B \subset \{1,\dots,n+2\}$, $B \neq \emptyset$, qu'on a

$$(5.0.12) \qquad \Lambda_B(t) \in F^{j+\operatorname{card}(B)-(n+2)} \quad .$$

Nous pourrons terminer la démonstration en appliquant le lemme (4.4.6), une fois démontrée l'assertion :

(5.0.13) si $jd < n+2$, alors $(j+\operatorname{card}(B)-(n+2))\, d < \operatorname{card}(B)$,

qui se récrit

(5.0.14) si $jd < n+2$, alors $(j-(n+2))\, d < \mathrm{card}(B)\,(1-d)$.

Mais

$$\inf_{\substack{B \subset \{1,\dots,n+2\} \\ B \neq \emptyset}} \mathrm{card}(B)\,(1-d) = (n+2)\,(1-d) \quad ,$$

de sorte qu'il suffit de démontrer

(5.0.15) si $jd < n+2$, alors $(j-(n+2))\, d < (n+2)(1-d)$,

ce qui est vrai.

<u>Remarque</u> 5.1. La condition

(5.1.1) $$jd < n+2$$

admet une interprétation cohomologique. Soit V une hypersurface <u>lisse</u> de degré d et de dimension n. Posons, comme dans XI 2.1, pour $a+b = n$

(5.1.2) $$h_0^{a,b} = \dim H^b(V, \underline{\Omega}_V^a) - \delta_{a,b} = \dim E^{a,b}(V)$$

où $E^{a,b}(V)$ est la composante de bidegré (a,b) de la "cohomologie évanescente de Hodge" (comparer XVII 5.4.4)

(5.1.3) $$E^{a,b}(V) = \mathrm{Coker}\,(H^b(\mathbb{P}^{n+1}, \underline{\Omega}^a_{\mathbb{P}^{n+1}}) \hookrightarrow H^b(V,\underline{\Omega}_V^a)) \quad .$$

Alors, par XI, 2.8,

(5.1.4) $$jd < n+2 \iff \left[\, h_0^{a,n-a} = 0 \text{ pour } a < j \text{ et } a > n-j \,\right] \quad ,$$

i.e. la condition signifie que le "niveau de Hodge" (XI 2.7) de la "cohomologie de Hodge évanescente" de V :

$$E^n_{DR}(V) = \mathrm{Coker}\ (H^n_{Hdg}\ (\mathbb{P}^{n+1}) \hookrightarrow H^n_{Hdg}\ (V))\ ,$$

est $\leq n-2j$, i.e. son co-niveau est $\geq j$. D'autre part, la conclusion signifie aussi que les valeurs propres du Frobenius $\mathfrak{F}_q$ opérant sur la cohomologie évanescente ℓ-adique ($\ell \neq p$) sont des entiers algébriques (XXI A.2) <u>divisibles par</u> q^j. Le résultat de AX 5.0. vient donc à l'appui de la conjecture suivante, suggérée par le yoga du niveau des motifs, et qui met en relations les classiques conjectures de HODGE [5] et de TATE [5] :

<u>Conjecture</u> 5.2. <u>Soient</u> $f : X \longrightarrow S$ <u>un morphisme propre et lisse</u>, <u>avec</u> S <u>intègre</u>, <u>de type fini sur</u> Spec($\mathbb{Z}$) <u>et dominant</u> Spec($\mathbb{Z}$), i,j <u>des entiers</u>. <u>Supposons que le co-niveau de Hodge du</u> H^i <u>de la fibre générique de</u> f <u>soit</u> $\geq j$. <u>Alors pour tout point</u> $s \in S$, <u>le coniveau</u> (XX 2.0.6) <u>de</u> $H^i(X_s,\mathbb{Q}_\ell)$ <u>est</u> $\geq j$, <u>donc</u> (XX 2.2) <u>si</u> s <u>est un point fermé de</u> S, <u>les valeurs propres de Frobenius opérant sur</u> $H^i(X_s,\mathbb{Q}_\ell)$ <u>sont des entiers algébriques divisibles par</u> q^j, <u>où</u> $q = \mathrm{card}(k(s))$.

6. Fin de la démonstration de la formule de congruence.

Compte tenu de (4.6.6) et (4.6.3)-(4.6.4), (4.5.24) donne une formule de congruence

(6.0.1) $$Z(t,V/\mathbb{F}_q)(1-t) \equiv \Delta_S(t)^{(-1)^{n+1}} \bmod 1 + qt\ \mathcal{O}[[t]]\ .$$

Passons au calcul de $\Delta_S(t)$ modulo $\pi\ \mathcal{O}[[t]]$. Définissons (cf. (4.6.11) :

(6.0.2) $$W_S = R_B \otimes_{\mathcal{O}} \mathbb{F}_q\ ,$$

(6.0.3) $\quad \overline{\alpha}_S : W_S \longrightarrow W_S$ l'opération τ^{-1}-linéaire induite par α_S ,

(6.0.4) $R_S(t)$ le sous-module de R_S forme des éléments de degré i en X_o ,

(6.0.5) $$W_S(i) \;=\; R_S(i) \otimes_{\mathbb{G}} \mathbb{F}_q \quad .$$

<u>Proposition</u> 6.0.6. <u>On a l'inclusion</u>

$$\alpha_S(R_S) \;\subset\; R_S(1) \;+\; p\, R_S \quad .$$

<u>Démonstration</u>. On a la factorisation (4.6.14)

(6.0.7) $$\alpha_S \;=\; \tau^{-1} \circ \frac{1}{p}\, \Psi_p \circ H(X) \quad .$$

On sait (cf. (4.6.15))

(6.0.8) $$H(X)\,.\,R_S \;\subset\; R_S \quad ,$$

et évidemment

(6.0.9) $$\tau^{-1}(R_S(1) + p\, R_S) \;=\; R_S(1) + p\, R_S \quad ,$$

de sorte qu'il suffit de vérifier

(6.0.10) $$\frac{1}{p}\, \Psi_p\, R_S \subset R_S(1) + p\, R_S \quad ,$$

ce qui est clair par (4.6.19).

<u>Corollaire</u> 6.0.11. <u>On a l'inclusion</u>

$$\overline{\alpha}_S\; W_S \;\subset\; W_S(1) \quad .$$

Corollaire 6.0.12. On a la congruence

$$\Delta_S(t) \equiv \det(1-t(\bar{\alpha}_S)^{\mathrm{ord}(q)}|W_S(1)) \bmod \pi\, \mathcal{O}[[t]] \quad .$$

Proposition 6.1. L'opération τ^1-linéaire $\bar{\alpha}_S : W_S(1) \longrightarrow W_S(1)$ est égale à l'opération

(6.1.1) $$\tau^{-1}\Psi_p \circ (X \circ f(X))^{p-1} \quad .$$

Démonstration. Ecrivons

(6.1.2) $$H(X) = 1 + \sum_{i\geq 1} H_i(X)$$

où

(6.1.3) $H_i(X)$ est de degré i en X_o .

D'après (4.6.19) encore, on a

(6.1.4) $$\frac{1}{p}\Psi_p\, R_S(i) \subset p\, R_S \quad \text{si} \quad i \neq p \quad .$$

Compte tenu de ce que

(6.1.5) $$H_i(X) \cdot R_S(j) \subset R_S(i+j) \quad ,$$

on a

(6.1.6) $$(\alpha_S - \frac{\tau^{-1}}{p}\Psi_p H_{p-1}(X))(R_S(1)) \subset p\, R_S \quad .$$

On a donc

(6.1.7) $$\left[(\alpha_S)^{\mathrm{ord}(q)} - (\frac{\tau^{-1}}{p}\Psi_p . H_{p-1}(X))^{\mathrm{ord}(q)}\right] R_S(1) \subset p\, R_S \quad .$$

Calculons maintenant $H_{p-1}(X)$. On a (cf. (4.4.4))

$$(6.1.8) \qquad H(X) = \prod_W \Theta(A_W X_o X^W)$$

$$= \prod_W \exp\left(\sum_{n\geq 0} \frac{\pi A_W X_o X^W)^{p^n}}{\cdot p^n}\right)$$

$$= \prod_W \prod_{n\geq 0} \exp\left(\frac{(\pi A_W X_o X^W)^{p^n}}{p^n}\right)$$

$$\equiv \prod_W \exp\,(\pi A_W X_o X^W) \quad \text{mod degré } p$$

$$\equiv \exp\,(\pi \quad \Sigma\, A_W X_o X^W) \quad \text{mod degré } p$$

$$\equiv \exp\,(\pi\, X_o F(X)) \quad \text{mod degré } p,$$

d'où

$$(6.1.9) \qquad H_{p-1}(X) \equiv \frac{\pi^{p-1} X_o^{p-1}}{(p-1)!} \quad F(X)^{p-1} \quad .$$

On constate facilement que

$$(6.1.10) \qquad \frac{\pi^{p-1}}{p} \equiv -1 \quad \text{mod} \quad p$$

donc

$$(6.1.11) \qquad \frac{1}{p}\, H_{p-1}(X) \equiv (X_o f(X)^{p-1} \quad \text{mod } p \quad ,$$

ce qui achève la démonstration de 6.1.

<u>Corollaire</u> 6.1.12. <u>L'opérateur linéaire</u>

$$(\bar{\alpha}_S)^{\mathrm{ord}(q)} : W_S(1) \longrightarrow W_S(1)$$

<u>n'est autre que</u> $\Psi_q \circ (X_o f(X))^{q-1}$.

Démonstration. D'après (6.1.1)

$$
\begin{aligned}
(\bar{\alpha}_S)^{\mathrm{ord}(q)} &= (\tau^{-1}\Psi_p \bullet (X_o f(X))^{p-1})^{\mathrm{ord}(q)} \\
&= \Psi_q \prod_{j=0}^{\mathrm{ord}(a)-1} (X_o^{p_j} f^{\tau^j}(X^{p^j}))^{p-1} \\
&= \Psi_q \prod_{j=0}^{\mathrm{ord}(q)-1} (X_o f(X))^{p^j(p-1)} \\
&= \Psi_q \circ (X_o f(X))^{q-1} \quad .
\end{aligned}
$$

Mettant ensemble (6.1.12) (6.0.12), et (6.0.1), on trouve,

Corollaire 6.1.13. On a la congruence mod p :

$$Z(t,V/\mathbb{F}_q) \equiv \frac{\det(1-t\ \Psi_q(X\circ f(X))^{q-1} \mid W_S(1))^{(-1)^{n+1}}}{1-t} \quad .$$

6.2. Il reste à calculer les groupes de cohomologie de $\mathcal{O}_V$.

Posons

(6.2.1) $\mathfrak{F}_q$ = l'opération "élévation à la puissance q'ième " dans $\mathcal{O}_V$.

Nous avons une suite exacte de faisceaux sur $\mathbb{P}^{n+1} = \mathbb{P}$:

(6.2.2) $$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-d) \xrightarrow{f} \mathcal{O}_{\mathbb{P}} \longrightarrow \mathcal{O}_V \longrightarrow 0 \quad ,$$

et le diagramme suivant est commutatif

(6.2.3)
$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-d) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f^{q-1}\mathfrak{F}_q"] & \mathcal{O}_{\mathbb{P}} \arrow[r] \arrow[d, "\mathfrak{F}_q"] & \mathcal{O}_V \arrow[r] \arrow[d, "\mathfrak{F}_q"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-d) \arrow[r, "f"] & \mathcal{O}_{\mathbb{P}} \arrow[r] & \mathcal{O}_V \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
\quad .
$$

Compte tenu de ce que

$$(6.2.4)\qquad \begin{cases} H^o(\mathbb{P}^{n+1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}) \simeq \mathbb{F}_q \\ H^i(\mathbb{P}^{n+1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}) = 0 \quad i \neq 0 \\ H^i(\mathbb{P}^{n+1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-d)) = 0 \quad i \neq 0,\ n+1 \end{cases},$$

la suite exacte longue de cohomologie associé à (6.2.2), donne

$$(6.2.5)\qquad \begin{cases} H^o(V, \mathcal{O}_V) \simeq \mathbb{F}_q \\ H^i(V, \mathcal{O}_V) = 0 \quad \text{si} \quad i \neq 0,n \\ H^n(V, \mathcal{O}_V) \simeq H^{n+1}(\mathbb{P}^{n+1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-d)) \end{cases}.$$

Le diagramme commutatif (6.2.3) donne alors

$$(6.2.6)\qquad \det(1 - t\,\mathfrak{F}_q | H^o(V, \mathcal{O}_V)) = 1 - t$$

et

$$(6.2.7)\quad \det(1-t\,\mathfrak{F}_q | H^n(V,\mathcal{O}_V)) = \det(1-t(f^{q-1}\mathfrak{F}_q) | H^{n+1}(\mathbb{P}^{n+1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-d)) .$$

Il ne reste qu'à établir

$$(6.2.8)\quad \det(1-t(f^{q-1}\mathfrak{F}_q) | H^{n+1}(\mathbb{P}^{n+1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-d)) = \det(1-t(\Psi_q\cdot(X_o f(X))^{q-1} | W_S(1))$$

ce qui est une conséquence de la

<u>Proposition</u> 6.3. <u>Il y a un isomorphisme</u>

$$(6.3.1)\qquad W_S(1) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_q}(H^{n+1}(\mathbb{P}^{n+1}. \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-d), \mathbb{F}_q)$$

<u>par rapport auquel l'opérateur</u>

$$(6.3.2)\qquad \Psi_q \circ (X_0 f(X))^{q-1} : W_S(1) \longrightarrow W_S(1)$$

est le transposé de

$$(6.3.3) \qquad f(X)^{q-1}\mathfrak{F}_q \ : \ H^{n+1}(\mathbb{P}^{n+1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-d)) \longrightarrow H^{n+1}(\mathbb{P}^{n+1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-d)) \ .$$

Démonstration. En calculant le groupe $H^{n+1}(\mathbb{P}^{n+1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-d))$ à l'aide du recouvrement standard de $\mathbb{P}^{n+1}$, on trouve

$$(6.3.4) \quad H^{i+1}(\mathbb{P}^{n+1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-d)) = \text{le } \mathbb{F}_q\text{-vectoriel de base des monômes } X_1^{W_1}\ldots X_{n+2}^{W_{n+2}}$$

$$\text{les } W_i \in \mathbb{Z} \text{ vérifiant } \Sigma W_i = -d$$

$$= \text{le } \mathbb{F}_q\text{-sous-vectoriel de base des monômes } X_1^{W_1}\ldots X_{n+2}^{W_{n+2}} \text{ qui vérifient en plus : } \exists\, i \text{ tel que } W_i \geq 0 \ .$$

D'autre part, $W_S(1) = R_S(1) \otimes_{\mathcal{O}} \mathbb{F}_q$, et on a

$$(6.3.5) \qquad R_S(1) = \text{le } \mathcal{O}\text{-module libre de base les monômes } (\pi X_0)\, X_1^{U_1}\ldots X_{n+2}^{U_{n+2}} \text{ vérifiant } \Sigma U_i = d,\ U_i > 0\ \forall_i \ .$$

L'accouplement

$$(6.3.6) \qquad (\ ,\ ) : W_S(1) \times H^{n+1}(\mathbb{P}^{n+1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-d)) \longrightarrow \mathbb{F}_q$$

défini par

$$(6.3.7) \qquad (\text{classe de } \pi X_0 X_1^{U_1}\ldots X_{n+2}^{U_{n+2}},\ X_1^{W_1}\ldots X_{n+2}^{W_{n+2}}) = \begin{cases} 1 \text{ si } U_i = -W_i \text{ pour tout } i \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

est évidemment une dualité parfaite de $\mathbb{F}_q$-vectoriels, et on constate facilement que $\Psi_q.(X\circ f(X))^{q-1}$ est la transposée de $f(X)^{q-1}\cdot f_q$, ce qui prouve 6.3.

Bibliographie

[1] AX, J. Zeroes of Polynomials Over Finite Fields, Amer. J. Math. 86, 1964, 255-261.

[2] DWORK, B. On the Rationality of the Zeta Function of an Algebraic Variety, Amer. J. Math. 82, 1960, 631-648.

[3] DWORK, B. An Algebraic Variety, in Proc. of the Woods-Hole Summer Institute 1964 (miméo).

[4] DWORK, B. On the Zeta Function of Hypersurface II, Ann. Math. (2), 80, 1964, 227-299.

[5] GROTHENDIECK, A., Le Groupe de Brauer III, dans Dix Exposés sur la Cohomologie des Schémas, North Holland Pub. Co, 1968.

[6] SERRE, J.P. Groupes Algébriques et Corps de Classes, Hermann, Paris, 1959.

[7] SERRE, J.P. Endomorphismes Complétement, Continus des Espaces de Banach p-Adiques, Pub. Math. I.H.E.S. n° 12, 1962.

[8] CHEVALLEY, C. Démonstration d'une hypothèse de M. Artin, Abhandlungen Math. Sem. Hamburg, 11, 1936, 73-75.