●表紙のつづき

表紙の問題を一般の d 次元 ($d \geqq 3$) に拡張しても同様の定理が成り立つことを以下に示そう．その定理を正確に述べると次のようになる：

定理 1（秋山-アロン，1985） R^d における一般の位置にある $d \cdot n$ 個の点の集合を A とし，$A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_d$ を A の d 個の n-元部分集合への分割とする．すなわち，

$$A_i \cap A_j = \phi \qquad (i \neq j),$$
$$|A_i| = n \qquad (i = 1, 2, \cdots, d)$$

をみたすとする．このとき，n 個の $(d-1)$-次元単体で，各単体は各 A_i $(1 \leqq i \leqq d)$ の点をちょうど1個ずつ頂点としてもち，かつ，それら n 個の単体のどの2つも互いに交わらないものが存在する．

たとえば $d = 3$ ならば，“3次元空間 R^3 の一般の位置に $3n$ 個の点があり，それらの点を赤，青，黄色で，かってに n 個ずつ塗る．このとき，どの2個も互いに交わらない赤，青，黄色の頂点をもつ n 個の3角形面（内部も含む）が存在する．”ということである．

定理1の証明を数学的にきちんとすると，測度論やトポロジーなどの基礎知識を必要とする．そこで，ここでは少々厳密性を欠くことは御容赦願うことにして，定理にたどりつく道すじだけを直感に訴えながら説明しよう．

トポロジーで良く知られた定理に Borsuk-Ulam の定理がある．この定理より次の命題を直ちに導くことができる．

命題 2 g を n 次元球面 S^n から R^n への連続写像とし，$g(-x) = -g(x)$ とするとき，$g(y) = 0$ なる点 $y \in S^n$ が存在する．ただし，球の中心を点対称の中心として考えたときの x の対称点を $-x$ とする．

命題2に基づいて，次に示すハム・サンドウィッチ定理を導くことができる．ハム・サンドウィッチ定理を手取り早く述べると次のようになる．

定理 3（ハム・サイドウィッチ定理の速修版） R^d に d 種類の物質 M_i $(i = 1, \cdots, d)$（たとえば，ハムやレタスやパンなど）が混在しているとき，ある $(d-1)$-次元超平面が存在し，それはすべての物質をちょうど半分ずつに分割する．

証明のあらすじ サンドウィッチが球の中に入っているとする．球の中心を通る直線と球面との交点 x，$-x$ を考える．この直線に垂直で x に接する平面を P とする．次に P を球の中心方向に平行移動する．物質 M_i が等分されるところで，x からその平面 P への距離をはかり，これを $d_i(x)$ $(i = 1, 2, \cdots, d)$ とする．明らかに

$$d_i(x) + d_i(-x) = \text{直径} \qquad ①$$

つぎに

$$g : S^{d-1} \longrightarrow R^{d-1},$$
$$g(x) = (d_2(x) - d_1(x), \cdots\cdots, d_d(x) - d_{d-1}(x))$$

と定義する．①より，

$$g(-x) = -g(x) \qquad ②$$

である．各 d_i は連続なので，

$$g \text{ も連続} \qquad ③$$

である．②，③と命題2より，$g(y) = 0$ なる $y \in R^{d-1}$ が存在する．このとき，

$$d_2(y) - d_1(y) = \cdots\cdots = d_d(y) - d_{d-1}(y) = 0$$

より，$d_1(y) = d_2(y) = \cdots\cdots = d_d(y)$ を得る．よって，すべての物質を等分する平面が存在する．▮

定理3で，各“物質”を“n 個ずつの点”に形式的に置き換えると次の定理を得る：

定理 4 $A, A_1, A_2, \cdots, A_d$ を定理1と同じものとする．このとき，各 i $(1 \leqq i \leqq d)$ に対して A_i の $\lfloor n/2 \rfloor$ 個の点が，H の上半空間 H^+ と下半空間 H^- にそれぞれ位置するような，R^d の超平面 H が存在する．すなわち，任意の i $(1 \leqq i \leqq d)$ に対して，

$$|H^+ \cap A_i| = |H^- \cap A_i| = \lfloor n/2 \rfloor \qquad (☆)$$

（式（☆）は n が奇数のとき，H が各 A_i をちょうど1個ずつ含むことに注意せよ．）

定理3から定理4は直感的には明らかであるが，“点”は体積をもたないので定理3をそのまま用いることはできない．そこで暫定的に各点をそれぞれ同じ体積の小さい球（球の中心は点の位置にあわせる）に置き換える．しかし，その際“d 個より多くの球を平面が切ってしまう”恐れがあることや，“平面の両側で体積が等分されるように球が切られているが，もとの点に戻すと，どちらの点も平面上にない”こともありうる．これらの都合の悪い場合を避けるために，球の半径を十分小さくとり，平面を少し動かせば，実際，これらの困難を克服できるのだが，紙面の都合でここでは割愛する．

定理4を用いれば，帰納法が使えて所望の定理1の証明が完成するというのが証明の概略である．それでも詳細が気になる読者は，『数セミ』編集部まで御連絡くだされば論文をお送りいたします．

秋山 仁（東海大学）