Note sur les foncteurs de déformations dérivés et la conjecture de de Jong

4 juin 2018

Dans [10], Galatius et Venkatesh ont défini, en utilisant les idées et constructions de la thèse de Lurie ([11]), les anneaux de déformations dérivés de représentations d'un groupe profini. Le but de cette note est de montrer que, si le groupe est est le groupe fondamental d'une courbe lisse sur un corps fini, ces anneaux sont "formellement quasi-lisses" au sens de l'article [1] de Arinkin-Gaitsgory (c'est-à-dire localement d'intersection complète au sens dérivé), et de prouver qu'ils sont discrets (c'est-à-dire non dérivés) dans beaucoup de cas si l'on admet la conjecture de de Jong. Il s'agit d'une adaptation facile des techniques de l'article [8] de de Jong.

1 Foncteurs de déformations dérivés

Cette section contient des rappels de l'article [10] de Galatius et Venkatesh.

1.1 Définitions

Soit k on corps. On note Art_k la catégorie des anneaux simpliciaux locaux artiniens A munis d'un isomorphisme du corps résiduel de $\pi_0(A)$ avec k (définition 2.2 de [10]) et SEns la catégorie des ensembles simpliciaux.

On fixe un schéma en groupes G sur $\mathbb{Z}$ qui est connexe réductif déployé et un groupe profini Γ. Pour tout sous-groupe ouvert distingué Δ de Γ, on note $X_\Delta = B(\Gamma/\Delta)$, vu comme un ensemble simplicial (c'est le nerf du groupoïde Γ/Δ). Soit X le pro-ensemble simplicial (X_Δ) (indexé par l'ensemble des sous-groupes ouverts distingués Δ de Γ, ordonné par l'inclusion). On fixe aussi un sous-groupe central Z de G, et on note $H = G/Z$.

Définition 1.1.1 *On définit deux foncteurs* $\mathrm{Rep}_{\Gamma,G}, [\mathrm{Rep}_{\Gamma,G}/H] : \mathrm{Art}_k \to \mathrm{SEns}$ *de la manière suivante*

(a) $\mathrm{Rep}_{\Gamma,G}$ *est le foncteur* $\mathscr{F}^{\square}_{X,G}$ *de la définition 5.4 de [10]. (Moralement,* $\mathrm{Rep}_{\Gamma,G}(A)$ *est "l'espace des morphismes continus* $\Gamma \to G(A)$*", mais cette définition n'est pas correcte pour* A *non discret, cf le début de la section 5.1 de [10]) ;*

(b) $[\mathrm{Rep}_{\Gamma,G}/H]$ *est le foncteur* $\mathscr{F}_{X,G,Z}$ *de la définition 5.8 de [10] (moralement, c'est le quotient de* $\mathscr{F}^{\square}_{X,G}$ *par* H *au sens des champs dérivés, d'où la notation).*

Indiquons brièvement la manière correcte de définir le foncteur $\mathrm{Rep}_{\Gamma,G}$ de (a). On définit d'abord un foncteur $A \mapsto BG(A)$ de la catégorie des anneaux commutatifs simpliciaux dans celle des ensembles simpliciaux fibrants, voir la section 5.1 de [10] ; si A est discret, $BG(A)$ est, à une équivalence d'homotopie près, l'espace classifiant usuel de $G(A)$, c'est-à-dire le nerf de $G(A)$ vu comme un groupoïde ayant un seul objet. Ensuite, on considère le pro-ensemble simplicial $B\Gamma = (B(\Gamma/\Delta))$, où Δ parcourt l'ensemble des sous-groupes ouverts distingués de Γ et $B(\Gamma/\Delta)$ est l'espace simplicial classifiant usual du groupe discret Γ/Δ (cf la section 5.2 de [10] et la note de bas de page dans cette section). Tous les (pro)-ensembles simpliciaux ci-dessus sont munis de points base naturels, et le foncteur $\mathrm{Rep}_{\Gamma,G}$ envoie A sur l'espace des morphismes de pro-espaces simpliciaux pointés $B\Gamma \to BG(A)$.

Rappelons aussi la définition des foncteurs de déformations dérivés. Ce sont des foncteurs de Art_k dans la catégorie des ensembles simpliciaux.

Définition 1.1.2 *Soit* $\overline{\rho} : \Gamma \to G(k)$ *un morphisme continu. On note* $\mathrm{Rep}_{\Gamma,G,\overline{\rho}}$ *et* $[\mathrm{Rep}_{\Gamma,G,\overline{\rho}}/H]$ *les foncteurs* $\mathscr{F}^{\square}_{X,\overline{\rho}}$ *et* $\mathscr{F}_{X,G,Z,\overline{\rho}}$*, définis respectivement dans la définition 5.4 et après le lemme 5.9 de [10].*

Plus précisément, $\mathrm{Rep}_{\Gamma,G,\overline{\rho}}$ et $[\mathrm{Rep}_{\Gamma,G,\overline{\rho}}/H]$ sont les fibres (homotopiques) de $\mathrm{Rep}_{\Gamma,G}$ et $[\mathrm{Rep}_{\Gamma,G}/H]$ au-dessus du k-point donné par $\overline{\rho}$.

Gâce au lemme 7.1 de [10], les π_0 des foncteurs ci-dessus sont les foncteurs de déformations usuels.

Rappelons le calcul des complexes tangents et les critères de représentabilité donnés par Galatius et Venkatesh. Pour tout action continue de Γ sur un groupe abélien topologique M, on note $C^\bullet(\Gamma, M)$ le complexe des cochaînes covariantes continues à valeurs dans M (cf [13] VII.3)

On note $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G) \otimes_{\mathbb{Z}} k$, et on fixe une représentation continue $\overline{\rho} : \Gamma \to G(k)$. On fait agir Γ sur $\mathfrak{g}$ via $\overline{\rho}$ et l'action adjointe de G.

Théorème 1.1.3 *(i) Le complexe tangent* $\mathrm{t}_{\mathrm{Rep}_{\Gamma,G,\overline{\rho}}}$ *de* $\mathrm{Rep}_{\Gamma,G,\overline{\rho}}$ *est quasi-isomorphe au complexe* $(\sigma_{\geq 1} C^{-\bullet}(\Gamma, \mathfrak{g}))[1]$*, où* $\sigma_{\geq 1}$ *est la troncature bête. En d'autres termes, on a*

$$\mathrm{t}_{\mathrm{Rep}_{\Gamma,G,\overline{\rho}},-i} = \begin{cases} C^{i+1}(\Gamma, \mathfrak{g}) & \text{si } i \geq 0 \\ 0 & \text{si } i < 0. \end{cases}$$

En particulier, on a :

$$\pi_{-i}(\mathfrak{t}_{\mathrm{Rep}_{\Gamma,G,\overline{\rho}}}) = \begin{cases} Z^1(\Gamma,\mathfrak{g}) & \textit{si } i=0 \\ H^{i+1}(\Gamma,\mathfrak{g}) & \textit{si } i \geq 1 \\ 0 & \textit{si } i<0. \end{cases}$$

(ii) Si $\mathrm{H}^0(\Gamma,\mathfrak{g}) = \mathrm{Lie}\, Z$, *alors* $\mathfrak{t}_{[\mathrm{Rep}_{\Gamma,G,\overline{\rho}}/H]}$ *est quasi-isomorphe à* $(\tau_{\geq 1}C^{-\bullet}(\Gamma,\mathfrak{g}))[1]$, *où* $\tau_{\geq 1}$ *est la troncature ordinaire. En particulier,*

$$\pi_{-i}(\mathfrak{t}_{[\mathrm{Rep}_{\Gamma,G,\overline{\rho}}/H]}) = \begin{cases} H^{i+1}(\Gamma,\mathfrak{g}) & \textit{si } i \geq 0 \\ 0 & \textit{si } i<0. \end{cases}$$

Démonstration. Les deux points résultent de l'exemple 4.38 et du lemme 5.5 de [10]. Pour (ii), voir aussi le lemme 5.10 de loc. cit.

□

Si on prend $H = G$ pour définir le foncteur $[\mathrm{Rep}_{\Gamma,G}/H]$, alors le complexe tangent correspondant est $C^{-\bullet}(\Gamma,\mathfrak{g})[1]$ (même référence), et son π_1 est donc $\mathrm{H}^0(\Gamma,\mathfrak{g})$. En particulier, si G n'est pas semi-simple, ce π_1 est toujours non nul et $[\mathrm{Rep}_{\Gamma,G}/H]$ ne peut pas être représentable par un pro-anneau simplicial. [1]

Théorème 1.1.4 *Le foncteur* $\mathrm{Rep}_{\Gamma,G,\overline{\rho}}$ *est pro-représentable au sens de la définition 2.19 de [10]. Si le centralisateur (schématique) de* $\overline{\rho}(\Gamma)$ *dans* G_k *est* $Z(G)_k$, *le foncteur* $[\mathrm{Rep}_{\Gamma,G,\overline{\rho}}/H]$ *est aussi pro-représentable.*

Si tous les $\mathrm{H}^i(\Gamma,\mathfrak{g})$ *sont de dimension finie sur* k, *alors ces foncteurs sont pro-représentables par un système projectif* $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'ob jets de* Art_k *tel que* $R := \varprojlim_n R_n$ *soit Noethérien au sens de Lurie (définition 2.5.9 de [11]), c'est-à-dire que* $\pi_0(R)$ *est noethérien et chaque* $\pi_i(R)$ *est un* $\pi_0(R)$*-module de type fini.*

Dans le dernier cas, on peut aussi suivre les conventions de Lurie (dans la section 6 de [11]) et remplacer $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par sa limite projective.

Sans la condition sur le centralisateur, le foncteur $[\mathrm{Rep}_{\Gamma,G,\overline{\rho}}/H]$ est représentable par un "champ dérivé formel".

Démonstration. Cela résulte du critère de représentabilité de Schlessinger dérivé dû à Lurie, voir le corollaire 6.2.14 de [11] et le théorème 4.33 de [10].

□

On note $\mathrm{R}^{\square}_{\overline{\rho}}$ et $\mathrm{R}_{H,\overline{\rho}}$ (s'il existe) les pro-objets de Art_k qui représentent $\mathrm{Rep}_{\Gamma,G,\overline{\rho}}$ et $[\mathrm{Rep}_{\Gamma,G,\overline{\rho}}/H]$.

1. Mais c'est un champ dérivé tout à fait sympathique.

1.2 Exemple des anneaux de déformations galoisiens

On suppose maintenant que $\Gamma = \pi_1^{\text{ét}}(X)$, où X est une courbe algébrique lisse géométriquement irréductible sur un corps $\mathbb{F}$ (avec un point géométrique fixé), et que la caractéristique ℓ de k ne divise pas la caractéristique p de $\mathbb{F}$. On suppose que le nombre premier ℓ est très bon pour G, au sens rappelé au-dessous du théorème 3.8 de [7]. C'est une condition plus faible que la condition que ℓ ne divise pas l'ordre du groupe de Weyl absolu de G, et si G est de type A_{n-1} (par exemple $G = \mathbf{GL}_n$ ou $\mathbf{SL}_n$), cela veut dire que ℓ ne divise pas n.

On dit que $\overline{\rho} : \Gamma \to G(k)$ est *absolument irréductible* si le morphisme $\Gamma \xrightarrow{\overline{\rho}} G(k) \subset G(\overline{k})$ est irréductible au sens de la section 3.2.1 de l'exposé Bourbaki [14] de Serre (c'est-à-dire si l'image de ce morphisme n'est contenue dans aucun sous-groupe parabolique de G). Ceci implique que $H^0(\Gamma, \operatorname{Lie} G) = \operatorname{Lie} Z$, où Z est le centre de G, voir le lemme 5.1 de l'article [7] de Boeckle-Harris-Khare-Thorne. (Ce résultat utilise la condition que ℓ est très bon pour G.)

Corollaire 1.2.1 *Dans ce corollaire, on suppose que G est semi-simple.*

(a) (Cf. le lemme 3.11 de l'article [8] de de Jong.) On suppose que $\mathbb{F}$ est algébriquement clos et que $\overline{\rho}$ est absolument irréductible. alors les complexes tangents $\mathrm{t}_{\mathrm{Rep}_{\Gamma,G,\overline{\rho}}}$ et $\mathrm{t}_{[\mathrm{Rep}_{\Gamma,G,\overline{\rho}}/H]}$ sont concentrés en degré 0, donc $\mathrm{R}_{\overline{\rho}}^{\square}$ et $\mathrm{R}_{H,\overline{\rho}}$ sont homotopiquement discrets (définition 7.4 de [10]) et leurs π_0 sont formellement lisses.

(b) Si $\mathbb{F}$ est de dimension cohomologique 1 (par exemple si $\mathbb{F}$ est fini) et si $(\overline{\rho}, X_{\overline{\mathbb{F}}})$ vérifie les conditions de (a), alors les les complexes tangents $\mathrm{t}_{\mathrm{Rep}_{\Gamma,G,\overline{\rho}}}$ et $\mathrm{t}_{[\mathrm{Rep}_{\Gamma,G,\overline{\rho}}/H]}$ sont concentrés en degré -1 et 0.

D'après (b), les foncteurs $\mathrm{Rep}_{\Gamma,G,\overline{\rho}}$ et $[\mathrm{Rep}_{\Gamma,G,\overline{\rho}}/H]$ méritent d'être appelés “formellement quasi-lisses” (cf la section 2.1.3 de l'article [1] de Arinkin et Gaitsgory).

Démonstration.

(a) Il s'agit de prouver que $\mathrm{H}^i(\Gamma, \mathfrak{g}) = 0$ pour $i \geq 2$. On raisonne comme dans la preuve du lemme 3.11 de [8]. Soit $\mathscr{L}$ le k-système local sur X correspondant à la représentation $\mathfrak{g}$ de $\pi_1(X)$. Comme X est une courbe, on a $\mathrm{H}^i(\Gamma, \mathfrak{g}) = \mathrm{H}^i_{\text{ét}}(X, \mathscr{L})$, et ce groupe est nul si $i \geq 3$. Si X est affine, la conclusion résulte donc des résultats sur la dimension cohomologique des schémas affines. Si X est projective, on peut utiliser la dualité de Poincaré pour calculer $\mathrm{H}^2_{\text{ét}}(X, \mathscr{L})$. D'après l'hypothèse que ℓ est très bon pour G et le (1) du théorème A de l'article [**?**] de Garibaldi, le G-module $\mathfrak{g}$ est autodual, donc on obtient :
$$\mathrm{H}^2_{\text{ét}}(X, \mathscr{L}) = (\mathrm{H}^0_{\text{ét}}(X, \mathscr{L}))^\vee,$$
et ce dernier groupe est nul car $\overline{\rho}$ est absolument irréductible (et on a vu ci-dessus que ceci impliquait que $\mathrm{H}^0(\Gamma, \mathfrak{g}) = \operatorname{Lie} Z$, où Z est le centre de G).
Noter que si X est affine, on n'a pas utilisé la condition que ℓ est très bon pour prouver (a).

(b) La suite spectrale de Hochschild-Serre appliquée à la suite exacte
$$1 \to \pi_1(X_{\overline{\mathbb{F}}}) \to \pi_1(X) \to \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}/\mathbb{F}) \to 1$$

donne une suite spectrale :

$$E_2^{ab} = \mathrm{H}^a(\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}/\mathbb{F}), \mathrm{H}^b(\pi_1(X_{\overline{\mathbb{F}}}), \mathfrak{g})) \Rightarrow \mathrm{H}^{a+b}(\pi_1(X), \mathfrak{g}).$$

D'après l'hypothèse sur la dimension cohomologique de $\mathbb{F}$ et de la conclusion de (a), on a $E_2^{ab} = 0$ si $a + b \geq 3$. Donc $\mathrm{H}^i(\pi_1(X), \mathfrak{g}) = 0$ si $i \geq 3$.

□

2 Classicité des foncteurs de déformation

Le but de cette section est de montrer que dans certains cas, les anneaux de déformations de la section 1.2 sont discrets, et d'en déduire qu'ils sont d'intersection complète. La stratégie est la même que celle de de Jong dans [8].

Soient Γ et G et $\overline{\rho}$ comme dans la section 1.1, Z un sous-groupe central de G et $H = G/Z$. On fixe aussi un sous-groupe fermé Γ' de Γ, et on lui associe un pro-ensemble simplicial X' comme au début de la section 1.1. On a un morphisme évident de pro-ensemble simpliciaux $X' \to X$ (induit par l'inclusion $\Gamma' \subset \Gamma$).

On dispose donc d'un diagramme commutatif de foncteurs $\mathrm{Art}_k \to \mathrm{SEns}$:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Rep}_{\Gamma,G} \arrow[r, "u"] \arrow[d] & {[\mathrm{Rep}_{\Gamma,G}/H]} \arrow[d] \\ \mathrm{Rep}_{\Gamma',G} \arrow[r, "u'"] & {[\mathrm{Rep}_{\Gamma',G}/H]} \end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont induites par la restriction le long de $X' \to X$.

2.1 Comparaison des foncteurs de déformations pour Γ et Γ'

On suppose que $\Gamma/\Gamma' \simeq \widehat{\mathbb{Z}}$, et on choisit un élément $\Phi \in \Gamma$ tel que $\Phi \cdot \Gamma'$ soit un générateur topologique de Γ/Γ'. On suppose aussi que Z est le centre de G.

La conjugaison par Φ définit alors un automorphisme de X', d'où des automorphismes des foncteurs $\mathrm{Rep}_{\Gamma,G}$ et $[\mathrm{Rep}_{\Gamma,G}/H]$, qu'on note tous les deux T.

Soit $\overline{\rho}$ un morphisme continu $\Gamma \to G(k)$. On note $\overline{\rho}' = \overline{\rho}_{|\Gamma'}$. À partir de maintenant, on suppose que les groupes de cohomologie et $\mathrm{H}^i(\Gamma', \mathfrak{g})$ sont tous de dimension finie sur k,[2] et que le centralisateur schématique de l'image $\overline{\rho}'$ dans G_k est $Z(G)_k$. On dispose donc des pro-anneaux simpliciaux $\mathrm{R}^{\square}_{\overline{\rho}}$, $\mathrm{R}_{H,\overline{\rho}}$, $\mathrm{R}^{\square}_{\overline{\rho}'}$ et $\mathrm{R}_{H,\overline{\rho}'}$, qu'on peut aussi voir comme des anneaux simpliciaux noethériens, et de morphismes canoniques $\mathrm{R}^{\square}_{\overline{\rho}} \to \mathrm{R}^{\square}_{\overline{\rho}'}$ et $\mathrm{R}_{H,\overline{\rho}'} \to \mathrm{R}_{H,\overline{\rho}}$. Les automorphismes T ci-dessus donnent des automorphismes τ de $\mathrm{R}^{\square}_{\overline{\rho}'}$ et $\mathrm{R}_{H,\overline{\rho}'}$.

2. Il en est donc de même des $\mathrm{H}^i(\Gamma, \mathfrak{g})$, grâce à la suite spectrale de Hochschild-Serre.

Proposition 2.1.1 *Le morphisme* $\mathrm{R}_{H,\overline{\rho}'} \to \mathrm{R}_{H,\overline{\rho}}$ *identifie* $\mathrm{R}_{H,\overline{\rho}}$ *au coégalisateur (homotopique) du diagramme* $\mathrm{R}_{H,\overline{\rho}'} \underset{\tau}{\overset{\mathrm{id}}{\rightrightarrows}} \mathrm{R}_{H,\overline{\rho}'}$.

Plus généralement, le morphisme $[\mathrm{Rep}_{\Gamma,G}/H] \to [\mathrm{Rep}_{\Gamma',G}/H]$ *identifie* $[\mathrm{Rep}_{\Gamma,G}/H]$ *à l'égalisateur du diagramme* $[\mathrm{Rep}_{\Gamma',G}/H] \underset{T}{\overset{\mathrm{id}}{\rightrightarrows}} [\mathrm{Rep}_{\Gamma',G}/H]$.

Démonstration. On prouve la deuxième assertion (qui implique la première). Soit $\mathscr{F}$ l'égalisateur du diagramme en question, on a un morphisme canonique $[\mathrm{Rep}_{\Gamma,G}/H] \to \mathscr{F}$ induit par $[\mathrm{Rep}_{\Gamma,G}/H] \to [\mathrm{Rep}_{\Gamma',G}/H]$.[3]

D'abord, on voit que le complexe tangent $\mathfrak{t}_{[\mathrm{Rep}_{\Gamma,G}/H]}$ s'identifie à l'égalisateur du diagramme $\mathfrak{t}_{[\mathrm{Rep}_{\Gamma',G}/H]} \underset{T_*}{\overset{\mathrm{id}}{\rightrightarrows}} \mathfrak{t}_{[\mathrm{Rep}_{\Gamma',G}/H]}$, d'après le calcul de ces complexes tangents dans le théorème 1.1.3, la suite spectrale de Hochschild-Serre pour la suite exacte $1 \to \Gamma' \to \Gamma \to \widehat{\mathbb{Z}} \to 1$, le calcul de la cohomologie continue de $\widehat{\mathbb{Z}}$, et le fait que $\mathrm{H}^0(\Gamma, \mathfrak{g}) = \mathrm{H}^0(\Gamma', \mathfrak{g}) = \mathrm{Lie}\, Z$.

Donc le morphisme $[\mathrm{Rep}_{\Gamma,G}/H] \to \mathscr{F}$ est étale, et, grâce au corollaire 3.2.17 de [11],[4] il suffit de montrer que c'est un isomorphisme sur les k-points, ce qui est clair.

□

2.2 Classicité de $[\mathrm{Rep}_{\Gamma,G,\overline{\rho}}/H]$

On reprend les notations et hypothèses de la section 2.1, et on note ℓ la caractéristique de k. On a donc fixé une représentation $\overline{\rho} : \Gamma \to G(k)$ telle que $\overline{\rho}_{\Gamma'}$ ait pour centralisateur $Z(G)_k$ et que les $\mathrm{H}^i(\Gamma', \mathfrak{g})$ soient tous de dimension finie.

Théorème 2.2.1 *On suppose de plus que* k *est fini, que* G *est semi-simple, que* $\mathrm{H}^i(\Gamma', \mathrm{Lie}\, G \otimes k) = 0$ *pour* $i \geq 2$ *et que, pour toute extension de corps* $k \subset L$ *et tout morphisme continu* $\rho : \Gamma \to G(L[[t]])$ *dont la réduction modulo* t *est* $\overline{\rho}$, $\rho(\Gamma)$ *est fini.*

On suppose de plus que $\ell \geq \dim \mathrm{Lie}\, G + 3$. *(En particulier,* ℓ *est très bon pour* G.*)*

Alors les anneaux $\mathrm{R}_{H,\overline{\rho}'}$ *et* $\mathrm{R}_{H,\overline{\rho}}$ *sont homologiquement discrets,* $\pi_0(\mathrm{R}_{H,\overline{\rho}'})$ *est formellement lisse sur* $W(k)$ *et* $\pi_0(\mathrm{R}_{H,\overline{\rho}})$ *est d'intersection complète, fini et plat sur* $W(k)$.

Démonstration. Les assertions sur $\mathrm{R}_{H,\overline{\rho}'}$ résultent du (a) corollaire 1.2.1. le fait que $\mathrm{R}_{H,\overline{\rho}}$ est 1-tronqué, c'est-à-dire que $\pi_i(\mathrm{R}_{H,\overline{\rho}}) = 0$ pour $i \notin \{0, 1\}$, résulte soit du (b) de ce même

3. On utilise ici le fait que les morphismes $[\mathrm{Rep}_{\Gamma,G}/H] \to [\mathrm{Rep}_{\Gamma',G}/H] \overset{\mathrm{id}}{\to} [\mathrm{Rep}_{\Gamma',G}/H]$ et $[\mathrm{Rep}_{\Gamma,G}/H] \to [\mathrm{Rep}_{\Gamma',G}/H] \overset{T}{\to} [\mathrm{Rep}_{\Gamma',G}/H]$ sont homotopes, ce qui n'aurait pas été vrai si l'on avait considéré les foncteurs $\mathrm{Rep}_{\Gamma,G}$ et $\mathrm{Rep}_{\Gamma',G}$.

4. Ou à la proposition 4.3 de [10].

corollaire et de la proposition 4.3(iii) de [10], soit de la proposition 2.1.1 (qui dit que $\mathrm{R}_{H,\overline{\rho}}$ est le coégalisateur (homotopique) du diagramme $\mathrm{R}_{H,\overline{\rho}'} \underset{\tau}{\overset{\mathrm{id}}{\rightrightarrows}} \mathrm{R}_{H,\overline{\rho}'}$).

On note $A_\bullet = \mathrm{R}_{H,\overline{\rho}}$, vu comme un anneau simplicial noethérien. Pour montrer que $A_\bullet$ est discret et plat sur $W(k)$, il suffit de montrer que $B_\bullet := A_\bullet \otimes_{W(k)} k$ est discret. Cela résulte directement du lemme 3.7.4 de [11], puisqu'un module plat sur un anneau discret est automatiquement discret, mais on peut aussi le prouver à la main de la manière suivante : On a une suite spectrale (homologique)

$$E_{2,pq} = \mathrm{Tor}_q^{W(k)}(\pi_p(A_\bullet), k) \Longrightarrow \pi_{p+q}(B_\bullet).$$

Comme $A_\bullet$ est 1-tronqué, $E_{2,pq} = 0$ si $p \notin \{0,1\}$. D'autre part, k est de dimension projective 1 sur $W(k)$, donc $E_{2,pq} = 0$ si $q \notin \{0,1\}$. En particulier, la suite spectrale dégénère en E_2. Si l'on sait que $B_\bullet$ est discret alors on obtient $\pi_0(B_\bullet) = \mathrm{Tor}_0^{W(k)}(\pi_0(A_\bullet), k)$, et $\mathrm{Tor}_0^{W(k)}(\pi_1(A), k) = \mathrm{Tor}_1^{W(k)}(\pi_0(A), k) = \mathrm{Tor}_1^{W(k)}(\pi_1(A), k) = 0$. En particulier, $\pi_1(A_\bullet)$ est plat et de torsion sur $W(k)$, donc nul, donc $A_\bullet$ est homotopiquement discret, et $\pi_0(A_\bullet)$ est plat sur $W(k)$.

De plus, si $A_\bullet$ est discret, il est automatiquement d'intersection complète sur $W(k)$ (car le complexe tangent de $[\mathrm{Rep}_{\Gamma,G,\overline{\rho}}/H]$ est concentré en degrés -1 et 0, et on peut donc appliquer le lemme 7.5 de [10]). Si de plus on sait prouver que $B_\bullet$ est une k-algèbre finie, alors on obtient que $A_\bullet$ est fini sur $W(k)$.

Il suffit donc de prouver que $B_\bullet$ est homotopiquement discret et fini sur k. On remarque que $B_\bullet$ représente le foncteur $[\mathrm{Rep}_{\Gamma,G,\overline{\rho}}/H]$ restreint à la sous-catégorie pleine Art'_k de Art_k dont les objets sont les R tels que le morphisme évident $R \to k$ ait une section. On note $\mathscr{F} = [\mathrm{Rep}_{\Gamma,G,\overline{\rho}}/H]_{|\mathrm{Art}'_k}$ et $\mathscr{F}' = [\mathrm{Rep}_{\Gamma',G,\overline{\rho}'}/H]_{|\mathrm{Art}'_k}$. Alors T se restreint en un automorphisme T de $\mathscr{F}'$, et $\mathscr{F}$ est l'égalisateur du diagramme $\mathscr{F}' \underset{T}{\overset{\mathrm{id}}{\rightrightarrows}} \mathscr{F}'$. Donc $\mathfrak{t}_{\mathscr{F}}[1]$ est le cône du morphisme $1 - T : \mathfrak{t}_{\mathscr{F}'} \to \mathfrak{t}_{\mathscr{F}'}$. Comme $\mathrm{R}_{H,\overline{\rho}'}$ est homotopiquement discret et plat sur $W(k)$, $\mathfrak{t}_{\mathscr{F}'}$ est concentré en degré 0, et donc :

$$\pi_{-i}(\mathfrak{t}_{\mathscr{F}}) = \begin{cases} \mathrm{Ker}(1-T) & \text{si } i = 1 \\ \mathrm{Coker}(1-T) & \text{si } i = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En particulier, $\pi_0(\mathfrak{t}_{\mathscr{F}})$ et $\pi_{-1}(\mathfrak{t}_{\mathscr{F}})$ ont la même dimension.

De plus, grâce à (7.10) et (7.11) dans [10] (qui expriment le fait que, si on complète $B_\bullet \to \pi_0(B_\bullet)$ en un tringle distingué $C_\bullet \to B_\bullet \to \pi_0(B_\bullet)$, alors $\pi_i(C_\bullet) = 0$ pour $i \in \{0,1\}$), le morphisme $\pi_i(\mathfrak{t}_{B_\bullet}) \to \pi_i(\mathfrak{t}_{\pi_0(B_\bullet)})$ est un isomorphisme si $i = 0$ et injectif si $i = -1$. Notons $g = \dim(\pi_0(\mathfrak{t}_{\pi_0(B_\bullet)}))$ et $r = \dim(\pi_{-1}(\mathfrak{t}_{\pi_0(B_\bullet)}))$; d'après le fait rappelé ci-dessus, on a $r \leq g$. Il est bien connu (voir par exemple le théorème 2.4 de l'article [4] de Böckle) que l'on a une présentation $\pi_0(B_\bullet) = k[[X_1, \ldots, X_g]]/J$, où le nombre minimum de générateurs de J est au plus r. Si on prouve que $\pi_0(B_\bullet)$ est une k-algèbre finie, on en déduira que $r = g$ donc que $\pi_{-1}(\mathfrak{t}_{B_\bullet}) \to \pi_{-1}(\mathfrak{t}_{\pi_0(B_\bullet)})$ est un isomorphisme, que $\pi_0(B_\bullet)$ est une intersection complète donc que $\pi_i(\mathfrak{t}_{\pi_0(B_\bullet)}) = 0$ pour $i \notin \{0, -1\}$, et donc que $\mathfrak{t}_{B_\bullet} \to \mathfrak{t}_{\pi_0(B_\bullet)}$ est un quasi-isomorphisme, ce qui implique que $B_\bullet \to \pi_0(B_\bullet)$ est étale, et par conséquent que c'est un isomorphisme.

Il suffit donc que prouver que $\pi_0(B_\bullet)$ est une k-algèbre finie. Or $\pi_0(B_\bullet)$ est l'anneau de déformations classique de Γ en égales caractéristiques. Pour montrer qu'il est fini, on suppose qu'il ne l'est pas et on procède comme dans 3.14 de [8] pour obtenir une extension finie L de k et un morphism $\pi_0(B_\bullet) \to L[[t]]$ d'image infinite. Ce morphisme correspond à une représentation continue $\rho : \Gamma \to G(L[[t]])$ dont la réduction modulo t est conjuguée à $\overline{\rho}$ par $G(\overline{k})$. Par hypothèse, l'image de ρ est finie, et on peut donc appliquer le lemme 2.2.2 ci-dessous pour montrer que l'image de ρ dans $\mathscr{F}(L[[t]])$ est égale à celle du morphisme $\Gamma \xrightarrow{\overline{\rho}} G(k) \subset G(L) \to G(L((t)))$. Mais alors le morphisme $\pi_0(B_\bullet) \to L[[t]]$ se factorise par l'inclusion $k \subset L[[t]]$, contradiction.

□

Lemme 2.2.2 *Soient k un corps de caractéristique ℓ, Γ un groupe fini et G un groupe réductif connexe déployé sur $\mathbb{Z}$. Soient $\rho, \rho' : \Gamma \to G(k[[t]])$ deux morphismes. On suppose que $\ell = 0$ ou $\ell \geq \dim \mathrm{Lie}\, G + 3$ et que les morphismes $\overline{\rho} : \Gamma \xrightarrow{\rho} G(k[[t]]) \to G(k)$ et $\overline{\rho}' : \Gamma \xrightarrow{\rho} G(k[[t]]) \to G(k)$ sont égaux et absolument irréductibles. Alors ρ et ρ' ont la même image dans $[\mathrm{Rep}_{\Gamma,G}/H](k[[t]])$.*

Démonstration. On peut supposer que ρ' est le morphisme $\Gamma \xrightarrow{\overline{\rho}} G(k) \subset G(k[[t]])$. Quitte à remplacer Γ par $\Gamma/\operatorname{Ker}\rho$, on peut supposer que ρ est injectif. Comme G est déployé, il a les mêmes sous-groupes paraboliques standard sur tous les corps, donc le fait que $\overline{\rho}$ soit absolument irréductible implique que ρ est absolument irréductible. D'après la proposition 4.1 de l'exposé [14] de Serre au séminaire Bourbaki (et avec la notation de cette proposition), on a $R_u(\Gamma) = \{1\}$.[5]

Il suffit de montrer que, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, les images de ρ et ρ' dans $[\mathrm{Rep}_{\Gamma,G}/H](k[[t]]/(t^N))$ sont égales.

On note LG le groupe pro-algébrique sur $\mathbb{Z}$ dont l'ensemble des A-points, pour toute $\mathbb{Z}$-algèbre A, est $G(A[[t]])$ (ie le groupe des lacets de G), et $U = \operatorname{Ker}(LG \to G)$, où $LG \to G$ est le morphisme évident (donné par la réduction modulo t). Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on note U_N le groupe pro-algébrique sur $\mathbb{Z}$ dont l'ensemble des A-points est $\operatorname{Ker}(G(A[[t]]) \to G(A[[t]]/(t^N))$. Alors $U = U_1$, les U_N sont des sous-groupes distingués de U, on a $U = \varprojlim_N U/U_N$, et $U_N/U_{N+1} \simeq \mathrm{Lie}\, G$ pour tout $N \geq 1$. (En particulier, U est pro-unipotent.) L'inclusion $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}[[t]]$ induit une section de $LG \to G$, qui permet d'identifier LG à $U \rtimes G$. L'action de G sur chaque quotient U_N/U_{N+1} est alors l'action adjointe de G sur $\mathrm{Lie}\, G$.

5. $R_u(\Gamma)$ est le radical unipotent de Γ vu comme groupe algébrique sur k, et il est aussi égal au ℓ-coeur de Γ si $\ell > 0$.

On fait agir Γ sur $U(k)$ en utilisant $\overline{\rho} : \Gamma \to G(k)$ et l'action de G sur U. L'hypothèse sur ρ et ρ' signifie qu'il existe une application $c : \Gamma \to U(k)$ telle que $\rho(\gamma) = u(\gamma)\overline{\rho}(\gamma)$, pour tout $\gamma \in \Gamma$. On voit facilement que u est un 1-cocycle.

D'après l'hypothèse sur ℓ et le théorème 4.5 de [14], pour tout morphisme $\Gamma \to GL_m(k)$ avec $m \leq \dim \mathrm{Lie}\, G + 1$, l'image de Γ dans $GL_m(k)$ est un sous-groupe complètement réductible (au sens de la section 3.2 de [14]). Autrement dit, toute représentation de Γ sur un k-espace vectoriel de dimension $\leq \dim \mathrm{Lie}\, G + 1$ est complètement réductible. En particulier, $\mathrm{H}^1(\Gamma, \mathrm{Lie}\, G \otimes k) = 0$.

Soit $N \geq 1$. Par le calcul ci-dessus et un dévissage évident, $\mathrm{H}^1(\Gamma, U/U_N) = 0$. Donc le 1-cocycle $c \mod U_N$ est un 1-cobord, c'est-à-dire qu'il existe $g \in (U/U_N)(k)$ tel que $u(\gamma)U_N(k) = g(\overline{\rho}(\gamma)g\overline{\rho}(\gamma)^{-1})^{-1}$ dans $(U/U_N)(k)$, pour tout $\gamma \in \Gamma$. On a alors $\rho(\gamma) = g\overline{\rho}(\gamma)g^{-1}$ dans $(LG/U_N)(k)$ pour tout $\gamma \in \Gamma$, ce qui implique que ρ et $\overline{\rho}$ ont la même image dans $[\mathrm{Rep}_{\Gamma,G}/H](k[[t]]/(t^N))$.

$\square$

Remarque 2.2.3 Si $G = GL_n$ (ou $\mathbf{SL}_n$), alors le lemme ci-dessus résulte du lemme 3.15 de [8]. La condition supplémentaire sur ℓ n'est pas nécessaire dans ce cas.

Corollaire 2.2.4 *On suppose que k est fini de caractéristique $\ell \geq \dim_k \mathrm{Lie}\, G + 3$, que la conjecture de de Jong (conjecture 2.3 de [8]) est vraie et que le groupe G est* semi-simple.

Soit X une courbe lisse sur un corps fini $\mathbb{F}$ dont la caractéristique est différente de ℓ. Alors le théorème précédent s'applique à $\Gamma = \pi_1(X)$.

En effet, comme G est semi-simple, il existe un morphisme injectif de groupes algébriques $G \to SL_N$, avec $N \in \mathbb{N}$. La conjecture de de Jong implique alors que, pour tout extension finie L de k, l'image de tout morphisme continu $\Gamma \to G(L((t)))$ est finie (cf le lemme 2.7 de [8]).

Remarque 2.3 La conjecture de de Jong dit que, si k est un corps fini de charactéristique p et $\ell \neq p$, pour tout schéma normal de type fini X sur k, pour tout $g \geq 1$ et pour toute représentation continue $\rho : \pi_1(X) \to \mathbf{GL}_d(E)$, où E est une extension finie de $\mathbb{F}_\ell((t))$, l'image du groupe fondqmental géométrique $\pi_1(X_{\overline{k}})$ par ρ est finie.

Dans son article [8], de Jong a réduit cette conjecture au cas où X est une courbe projective lisse géométriquement connexe, ρ est de déterminant 1 et $\rho_{|\pi_1(X_{\overline{k}})}$ est absolument irréductible. Il a aussi prouvé sa conjecture dans le cas $d = 2$ en généralisant aux coefficients E la construction par Drinfeld du faisceau automorphe correspondant à ρ comme ci-dessus.

Gaistgory a étendu dans [9] la preuve de de Jong au cas où d est quelconque et $\ell > 2$, modulo deux résultats : la théorie des faisceaux étales à coeffiecients dans E et l'isomorphisme de Satake géométrique pour la Grassmannienne affine sur k et les coefficients de ℓ-torsion (le cas de la Grassmannienne affine sur $\mathbb{C}$ est traité dans l'article [12] de Mirkovic et Vilonen, voir aussi les notes [2] de Baumann et Riche). Le premier résultat est maintenant connu grâce à la théorie du site pro-étale de Bhatt et Scholze (voir [3]), le deuxième résultat n'existe toujours pas dans la littérature.

Signalons aussi que Böckle et Khare ont prouvé dans [5] et [6] certains cas de la conjecture de de Jong pour $d \geq 2$ et sans restriction sur ℓ en utilisant la méthode de Taylor-Wiles (donc avec des conditions sur l'image de $\overline{\rho}$).

Références

[1] D. Arinkin and D. Gaitsgory. Singular support of coherent sheaves and the geometric Langlands conjecture. *Selecta Math. (N.S.)*, 21(1) :1–199, 2015.

[2] Pierre Baumann and Simon Riche. Notes on the geometric Satake equivalence . `https://arxiv.org/abs/1703.07288`, 2018.

[3] Bhargav Bhatt and Peter Scholze. The pro-étale topology for schemes. *Astérisque*, (369) :99–201, 2015.

[4] Gebhard Böckle. A local-to-global principle for deformations of Galois representations. *J. Reine Angew. Math.*, 509 :199–236, 1999.

[5] Gebhard Böckle and Chandrashekhar Khare. Mod l representations of arithmetic fundamental groups. I. An analog of Serre's conjecture for function fields. *Duke Math. J.*, 129(2) :337–369, 2005.

[6] Gebhard Böckle and Chandrashekhar Khare. Mod l representations of arithmetic fundamental groups. II. A conjecture of A. J. de Jong. *Compos. Math.*, 142(2) :271–294, 2006.

[7] Gebhard Böckle, Michael Harris, handrashekhar Khare, and Thorne Jack. $\widehat{G}$-local systems on smooth projective curves are potentially automorphic, 2016.

[8] A. J. de Jong. A conjecture on arithmetic fundamental groups. *Israel J. Math.*, 121 :61–84, 2001.

[9] Ofer Gabber. Notes on some t-structures. In *Geometric aspects of Dwork theory. Vol. I, II*, pages 711–734. Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin, 2004.

[10] S. Galatius and A. Venkatesh. Derived Galois deformation rings. *Adv. Math.*, 327 :470–623, 2018.

[11] Jacob Lurie. Derived algebraic geometry. `http://www.math.harvard.edu/~lurie/papers/DAG.pdf`.

[12] I. Mirković and K. Vilonen. Geometric Langlands duality and representations of algebraic groups over commutative rings. *Ann. of Math. (2)*, 166(1) :95–143, 2007.

[13] Jean-Pierre Serre. *Corps locaux*. Hermann, Paris, 1968. Deuxième édition, Publications de l'Université de Nancago, No. VIII.

[14] Jean-Pierre Serre. Complète réductibilité. *Astérisque*, (299) :Exp. No. 932, viii, 195–217, 2005. Séminaire Bourbaki. Vol. 2003/2004.