$n-1$, il en résulte que

$$\lim \int_{-\tau}^{\tau} e^{-t^s} \mathrm{P}_n(t)\, dt = 0$$

lorsque $s \to \infty$.

La propriété (5) des polynomes $\mathrm{P}_j(t)$ permet d'approfondir l'étude du développement (3).

CALCUL DES PROBABILITÉS. — *Sur la théorie des jeux.* Note [1] de M. **J. v. Neumann**, présentée par M. Émile Borel.

I. Dans son Livre *Éléments du calcul des probabilités* (Hermann, Paris, 1924, 3e édition), ainsi que dans plusieurs Notes dans les *Comptes rendus*, (184, 10 janvier 1927, p. 52-55 : *Sur les systèmes linéaires à déterminant symétrique gauche et la théorie du jeu*), M. E. Borel traite le problème suivant : « Deux joueurs, I et II, jouent un jeu, qui consiste du choix d'un nombre x exécuté par I et du choix d'un nombre y exécuté par II; le choix de x devant se faire entre les nombres $1, 2, \ldots, \mathrm{M}$ et celui de y entre les nombres $1, 2, \ldots, \mathrm{N}$. Chacun est obligé de faire son choix sans connaître celui de l'autre, et si I et II ont choisi respectivement x, y, II doit verser à I la somme $a_{xy}\,(a_{xy} \gtreqless 0)$; le déterminant

$$|a_{xy}| \qquad (x = 1, 2, \ldots, \mathrm{M};\quad y = 1, 2, \ldots, \mathrm{N})$$

est donc caractéristique pour le jeu, c'est la règle du jeu. Quelle est la meilleure façon de jouer pour I et pour II? » En particulier, M. Borel admet que le jeu soit juste, c'est-à-dire que I et II y aient le même rôle; ce qui siguifie évidemment $\mathrm{M} = \mathrm{N}$, $a_{xy} = -a_{yx}$ (c'est-à-dire que le déterminant $|a_{xy}|$ est symétrique gauche).

M'étant occupé indépendamment avec le même problème (un peu généralisé) et ayant obtenu, entre autres, un résultat qui donne une réponse affirmative à la question principale (et non résolue) que pose M. Borel, je me permets de revenir sur ce problème. La déduction détaillée de mes résultats paraîtra bientôt dans un autre Recueil : *Zur Theorie der Gesellschaftsspiele*.

II. Notons d'abord, que le jeu défini tout à l'heure avec l'aide d'un déterminant $|a_{xy}|$ pourrait paraître bien spécial, mais qu'on peut, en intro-

---

[1] Séance du 14 mai 1928.

duisant la notion de la « tactique du joueur » (voir *loc. cit.*, chez M. Borel ou l'auteur) réduire tout jeu joué par deux personnes à cette forme.

Une remarque plus essentielle est la suivante : La question : « Comment I (resp. II) doit-il jouer, pour s'assurer un gain aussi grand que possible, c'est-à-dire pour rendre a_{xy} aussi grand (resp. petit) que possible ? » n'a pas de sens défini. En effet, comment I (resp. II) peut-il rendre a_{xy} grand (resp. petit), vu qu'il n'a pas la faculté d'en fixer la valeur — il ne détermine que la valeur de x (resp. y), l'indice de ligne (resp. colonne) dans $\{a_{xy}\}$! I et II essayent d'influer a_{xy} en déterminant une ligne resp. une colonne de $\{a_{xy}\}$, et l'un veut rendre a_{xy} grand, l'autre petit — qu'est-ce qui va arriver ? Le vrai problème, c'est de trouver ici une définition exacte et plausible (de l'intérêt de I resp. II), permettant une solution unique.

III. Si I a fait le choix x, il gagnera au moins la somme $\mathrm{Min}_y a_{xy}$; et il ne gagne certainement pas plus, si II connaît sa façon de jouer, s'il choisit l'y le plus avantageux contre cet x. En choisissant x d'une façon convenable, cette somme peut monter au plus à $\mathrm{Max}_x \mathrm{Min}_y a_{xy}$. C'est donc ce que peut gagner I en tous les cas (indépendamment de ce que fait II !) — et il ne gagnera certainement pas plus, si II connaît sa façon de jouer, si II est le plus perspicace. De la même façon on voit encore : II peut empêcher (indépendamment de ce que fait I !) que I gagne plus que $\mathrm{Min}_y \mathrm{Max}_x a_{xy}$ — mais I peut gagner cette somme, si c'est lui qui connaît la façon de jouer de II, si c'est lui qui est le plus perspicace.

On voit aisément

$$\mathrm{Max}_x \mathrm{Min}_y a_{xy} \leqq \mathrm{Min}_y \mathrm{Max}_x a_{xy}.$$

Si le signe $=$ a lieu, tout est clair : la valeur commune donne la somme, que I doit et peut gagner ; II ne peut pas empêcher qu'il l'obtienne, mais il peut empêcher qu'il la dépasse. On voit aussi facilement de quelle façon I et II doivent jouer pour cette raison. Mais en général le signe $<$ a lieu, comme les exemples

$$\begin{Bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{Bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{Bmatrix}$$

(pour $\{a_{xy}\}$) le montrent (le dernier de ces exemples est le jeu « morra »). Donc notre raisonnement est sans valeur en général, et nous devons en trouver un autre.

IV. On peut essayer la méthode suivante (voir *loc. cit.*, M. Borel ou l'auteur) : I ne doit pas choisir l'un des nombres 1, 2, ..., M; il est seulement obligé de fixer M probabilités $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_M$ (tous $\geqq 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_M = 1$), et de choisir $x = 1, 2, \ldots, M$ resp. avec ces probabilités. De même II ne choisira pas $y = 1, 2, \ldots, N$, mais des probabilités $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_N$ (tous $\geqq 0$, $\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_N = 1$) pour ces éventualités.

Si I resp. II ont choisi α resp. β (abréviations pour $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_M$ resp. $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_N$), la valeur probable du gain de I est

$$g(\alpha\beta) = \sum_{x=1}^{M} \sum_{y=1}^{N} a_{xy}\alpha_x\beta_y.$$

[Donc $g(\alpha\beta)$ est une forme bilinéaire de α, β]. Nous pouvons répéter avec $g(\alpha\beta)$ les raisonnements du paragraphe III faits avec a_{xy}. Donc il sera d'une extrême importance de savoir si

$$\mathrm{Max}_\alpha \mathrm{Min}_\beta g(\alpha\beta) = \mathrm{Min}_\beta \mathrm{Max}_\alpha g(\alpha\beta)$$

a toujours lieu ou non, le problème du jeu de deux personnes étant résolu au premier cas.

V. M. Borel a formulé (*loc. cit.*) l'hypothèse que $\mathrm{Max}_\alpha \mathrm{Min}_\beta = \mathrm{Min}_\beta \mathrm{Max}_\alpha$ a lieu pour tous les a_{xy} [et $g(\alpha\beta)$], si le jeu est juste, c'est-à-dire pour $a_{xy} = -a_{yx}$ [et $g(\alpha\beta) = -g(\beta\alpha)$]; mais il ne l'a prouvé que pour quelques cas spéciaux (M, N $\leqq 5$) (1). L'auteur a pu prouver (voir le Mémoire cité dans les *Math. Ann.*) $\mathrm{Max}_\alpha \mathrm{Min}_\beta = \mathrm{Min}_\beta \mathrm{Max}_\alpha$ pour tous les systèmes a_{xy}, sans restrictions. Ce théorème résout le problème du jeu de 2 personnes dans sa forme la plus générale (voir § II).

VI. Pour plus que 2 joueurs de nouvelles difficultés surgissent. L'auteur a pu résoudre le problème du jeu de 3 personnes.

GÉOMÉTRIE INFINITÉSIMALE. — *Sur les coefficients de Ricci.* Note (2) de M. V. **Hlavatý**.

Imaginons dans une variété de Riemann V_m, n congruences orthogonales, linéairement indépendantes et désignons par $\underset{k}{e}^\nu = \dfrac{dx^\nu}{ds_k}$ ($k = 1, \ldots, n$) le vec-

(1) (On voit aisément que, pour $a_{xy} = -a_{yx}$, la valeur commune de $\mathrm{Max}_\alpha \mathrm{Min}_\beta$ et $\mathrm{Min}_\beta \mathrm{Max}_\alpha$ ne peut être autre que O.)

(2) Séance du 11 mai 1928.